

涡旋发展和移动的动力和热力问题Ⅱ： 广义倾斜涡度发展^{*1}

吴国雄¹ 郑永骏^{1,2} 刘屹岷¹

WU Guoxiong¹ ZHENG Yongjun^{1,2} LIU Yimin¹

1. 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京, 100029

2. 中国科学院大学, 北京, 100049

1. *State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*

2. *University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*

2012-03-28 收稿, 2012-08-31 改回.

吴国雄, 郑永骏, 刘屹岷. 2013. 涡旋发展和移动的动力和热力问题Ⅱ: 广义倾斜涡度发展. 气象学报, 71(2): 198-208

Wu Guoxiong, Zheng Yongjun, Liu Yimin. 2013. Dynamical and thermal problems in vortex development and movement. Part II: Generalized slantwise vorticity development. *Acta Meteorologica Sinica*, 71(2): 198-208

Abstract The development of vertical vorticity under adiabatic condition is investigated by virtue of the view of potential vorticity and potential temperature ($PV-\theta$) and from a Lagrangian perspective. A new concept of generalized slantwise vorticity development (GSVD) is introduced for adiabatic condition. The GSVD is a coordinate independent framework of vorticity development (VD) which includes slantwise vorticity development (SVD) when a particle is sliding down the concave slope or up the convex slope of a sharply tilting isentropic surface under stable or unstable condition. The SVD is a special VD for studying the severe weather systems with rapid development of vertical vorticity. In addition, the GSVD clarifies VD and SVD. The criteria for VD and SVD demonstrate that the demand for SVD is much more restricted than the demand for VD. When an air parcel is moving down the concave slope or up the convex slope of a sharply tilting isentropic surface in a stable stratified atmosphere with its stability decreasing, or in an unstable atmosphere with its stability increasing, i. e., its stability θ_s approaches zero, its vertical vorticity can develop rapidly if its C_D is decreasing.

The theoretical results are employed to analyze a Tibetan Plateau (TP) vortex (TPV) which appeared over the TP then slid down and moved eastward in late July 2008, resulting heavy rainfall in Sichuan Province and along the middle and lower reaches of the Yangtze River. The change of PV_2 contributed to the intensification of the TPV from 00:00 UTC to 06:00 UTC 22 July 2008 when it slid upward on the upslope of the northeastern edge of Sichuan basin, since the changes in both horizontal vorticity η_s and baroclinity θ_s have positive effects on the development of vertical vorticity. At 06:00 UTC 22 July 2008, the criterion for SVD at 300 K isentropic surface is satisfied, meaning that SVD occurred and contributed significantly to the development of vertical vorticity. The appearance of the stronger signals concerning the VD and SVD surrounding the vortex indicates that the GSVD concept can serve as a useful tool for diagnosing the development of weather systems.

Key words Potential vorticity, Vorticity development, Slantwise vorticity development, Generalized slantwise vorticity development

摘 要 从位涡-位温($PV-\theta$)以及拉格朗日观点, 引入广义倾斜涡度发展的概念研究绝热条件下的垂直涡度发展. 广义倾斜

* 资助课题: 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2012CB417203, 2010CB950403)、国家自然科学基金项目(40875034, 40925015)。

作者简介: 吴国雄, 主要从事天气和气候动力学研究。E-mail: gxwu@lasg.iap.ac.cn

涡度发展是一个与涡度发展的坐标无关的概念框架,该框架包括倾斜涡度发展。倾斜涡度发展研究当大气处于稳定或不稳定层结情形,空气质点沿着向上凸的陡峭等熵面下滑或沿着向下凹的陡峭等熵面上滑过程垂直涡度激烈发展。因此,倾斜涡度发展是研究强烈天气过程的涡度发展非常强的情形。此外,广义倾斜涡度发展概念澄清了涡度发展和倾斜涡度发展的区别,涡度发展和倾斜涡度发展的判别标准表明,倾斜涡度发展的要求比涡度发展的要求严格很多。在空气质点沿着向上凸的陡峭等熵面下滑或沿着向下凹的陡峭等熵面上滑过程,当在稳定大气中静力稳定度(θ_z)迅速减小或在不稳定大气中静力稳定度(θ_z)迅速增大,即静力稳定度(θ_z)趋于0时,如果 $C_D < 0$,那么垂直涡度将急速发展。应用得到的理论结果分析了2008年7月下旬的一次青藏高原低涡过程,该低涡形成于青藏高原中西部,东移滑出青藏高原然后继续东移,给四川盆地和长江中下游带来强降水。诊断表明,2008年7月22日00—06时(世界时)青藏高原低涡沿着四川盆地东北边的斜坡爬升时低涡加强发展, PV_2 变化对低涡加强发展有贡献,因为此时的水平涡度(η_z)变化和斜压度(θ_s)变化都对垂直涡度发展起正贡献。而且,22日06时,330 K等熵面的倾斜涡度发展判据满足,表明倾斜涡度发展并对垂直涡度发展起重要贡献。围绕着重低涡中心较强的涡度发展和倾斜涡度发展信号表明,广义倾斜涡度发展概念框架可以作为诊断天气过程的一个有用工具。

关键词 位涡, 涡度发展, 倾斜涡度发展, 广义倾斜涡度发展

中图法分类号 P434+.1

1 引言

本研究的第1部分(郑永骏等,2013)从 $PV-Q$ 观点和拉格朗日观点探讨了非绝热加热对涡旋发展和移动的影响,展示了非绝热加热在垂直和水平方向的非均匀分布对涡旋的发展和移动起主要作用。本文将通过修改倾斜涡度发展理论(Wu, et al, 1997),着重从位涡-位温($PV-\theta$)观点研究绝热条件下的涡旋发展。如本研究的第1部分所示,单位质量的绝对涡度可以写成

$$\eta_z = \frac{PV_e - PV_2}{\theta_z} = \frac{PV_e}{\theta_z} - C_D \quad (\theta_z \neq 0) \quad (1)$$

其中,

$$C_D = \frac{PV_2}{\theta_z} = \frac{\eta_s \cdot \theta_s}{\theta_z} \quad (\theta_z \neq 0) \quad (2)$$

这里和下面用到的数学符号引自本研究的第1部分。

基于位涡的守恒性,Wu等(1997)提出了倾斜涡度发展理论来解释拉格朗日质点沿着等熵面下滑时垂直涡度的发展,并给出了倾斜涡度发展的条件

$$C_D(t + \Delta t) - C_D(t) < PV_e \left[\frac{1}{\theta_z(t + \Delta t)} - \frac{1}{\theta_z(t)} \right] \quad (3)$$

此外,对静力稳定大气情形,Wu等(1997)给出了示意图解释下滑倾斜涡度发展,而Cui等(2003)给出了示意图解释上滑倾斜涡度发展。

很多研究应用倾斜涡度发展理论来诊断强降水和剧烈天气的发生,得到了合理结果并展示了垂直涡度在陡峭倾斜等熵面上的剧烈发展,同时在一些个例中诊断了 $C_D < 0$ 条件(崔晓鹏等,2002;马雷鸣

等,2002;陈忠明等,2004;姜勇强等,2004;王瀛等,2007)。但是,如式(1)所示,在 PV_e 守恒条件下垂直涡度发展不仅依赖于 C_D ,同时依赖于 θ_z 。依据式(2)中 C_D 定义,在大气稳定层结情形,负的 C_D 意味着负的 PV_2 。Hoskins等(1985)证明了在气压坐标中 PV_2^p 在地转平衡条件下是负的。在高度坐标中,静力平衡条件下则有

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \nabla_s p = \theta \nabla_s \Pi \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z} = -\frac{g}{\theta} \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\Pi = c_p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p}$ 是 Exner 函数。于是,高度坐标下的地转风为

$$\mathbf{V}_g = \frac{\mathbf{k}}{\rho f} \times \nabla_s p = \theta \frac{\mathbf{k}}{f} \times \nabla_s \Pi \quad (5)$$

对式(5)取偏导数 $\frac{\partial}{\partial z}$ 得热成风

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial z} &= \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\mathbf{k}}{f} \times \nabla_s \Pi + \theta \frac{\mathbf{k}}{f} \times \nabla_s \frac{\partial \Pi}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\mathbf{k}}{f} \times \nabla_s \Pi + \frac{g}{\theta} \frac{\mathbf{k}}{f} \times \nabla_s \theta \end{aligned} \quad (6)$$

因此,

$$\begin{aligned} PV_2 &= \alpha \left(\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial z} \right) \cdot \nabla_s \theta \\ &= -\frac{\alpha}{f} \left(\theta_z \nabla_s \Pi \cdot \nabla_s \theta + \frac{g}{\theta} |\nabla_s \theta|^2 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

和

$$C_D = \frac{PV_2}{\theta_z} = -\frac{\alpha}{f} \left(\nabla_s \Pi \cdot \nabla_s \theta + \frac{g}{\theta \theta_z} |\nabla_s \theta|^2 \right) \quad (8)$$

在北半球,地转垂直涡度 f 是正的,因此,式(7)右端第 2 项 $PV_2^2 = -\frac{\alpha}{f} \frac{g}{\theta} |\nabla_s \theta|^2$ 是负的。虽然第 1 项 $PV_2^1 = -\frac{\alpha}{f} \theta_z \nabla_s \Pi \cdot \nabla_s \theta$ 不一定为负,但其绝对值一般都比第 2 项 PV_2^2 小,因此,在地转平衡条件下对流层的 PV_2 几乎都是负的。图 1 给出了

2008 年 7 月 22 日 06 时(世界时,下同)实际大气中的 C_D 和 PV_2 的三维分布,其他时次的分布类似。这表明在对流层中 C_D 和 PV_2 一般为负的。于是单独使用 $C_D < 0$ 作为倾斜涡度发展判据是不恰当的。对于一般情形,静力稳定度的变化的影响必须考虑。

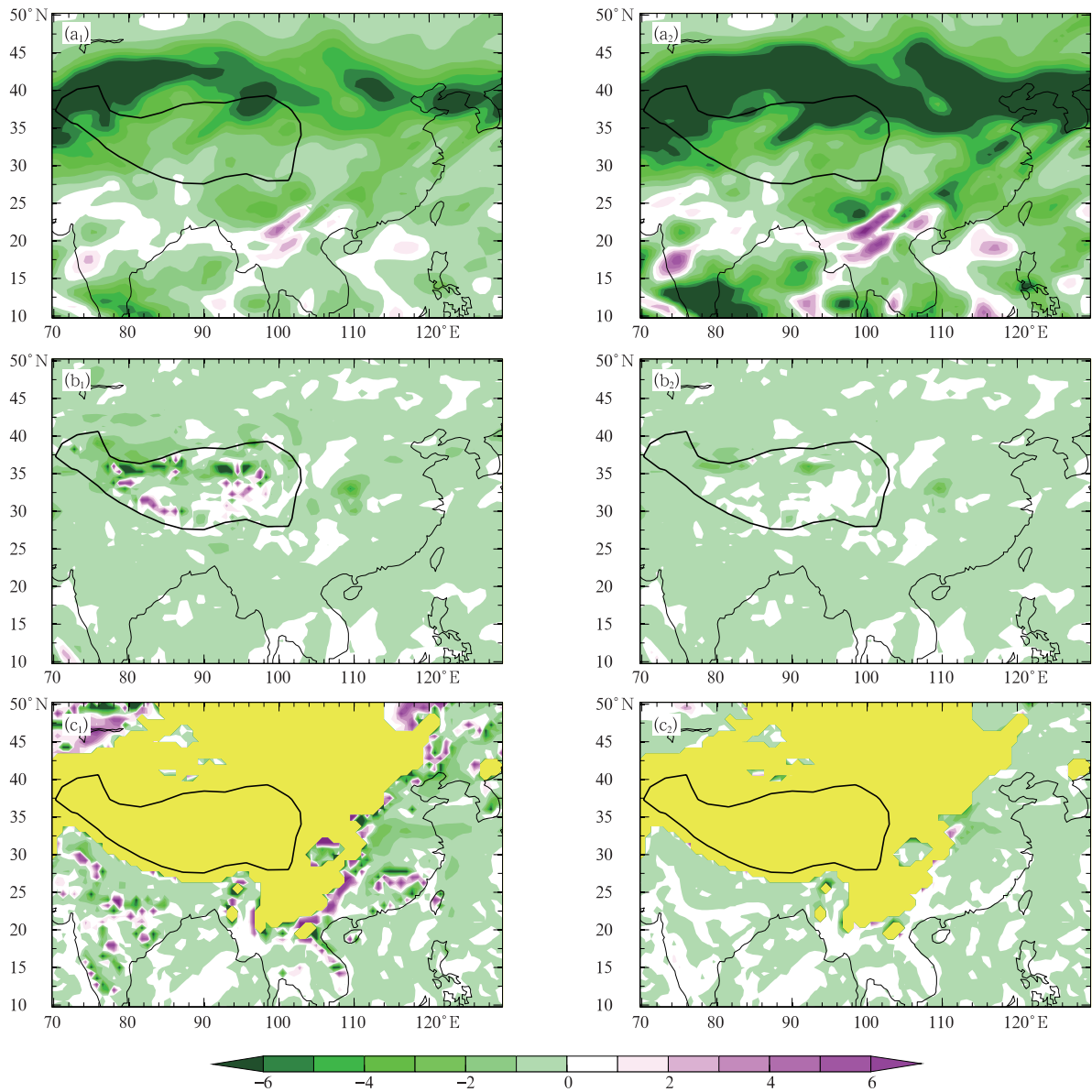


图 1 2008 年 7 月 20 日 06 时的 C_D (a_1 、 b_1 、 c_1 ;单位: $10^{-5} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s})$)和 PV_2 (a_2 、 b_2 、 c_2 ;单位: $10^{-1} \text{ PVU}^{①}$) 在 100(a_1 、 a_2)、500(b_1 、 b_2)、900 hPa(c_1 、 c_2) 的分布(黄色区域表示位于地表下面,下同)

Fig. 1 Distributions at 100 hPa (a_1 , a_2), 500 hPa (b_1 , b_2), and 900 hPa (c_1 , c_2) of C_D (a_1 , b_1 , c_1 ; $10^{-5} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s})$) and PV_2 (a_2 , b_2 , c_2 ; 10^{-1} PVU) at 06:00 UTC 22 July 2008 (Yellow marks the region underneath the ground surface, the same for following figures)

① $1 \text{ PVU} = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{K}/(\text{kg} \cdot \text{s})$

在本研究的第1部分,从拉格朗日观点推导出的如下垂直涡度发展方程

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_z}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{PV_e - PV_2}{\theta_z} \right) \\ &= \frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_e}{dt} - \frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt} - \frac{\eta_z}{\theta_z} \frac{d\theta_z}{dt} \end{aligned} \quad (9)$$

并展示了式(9)右端第1项主要是由非绝热加热引起的,而且,对涡旋的发展和移动起主要作用。然而,在涡旋发展的某些阶段,另外两项与大气内部热力结构有关,并可以用倾斜涡度发展解释,这两项有时可以起与非绝热加热作用相当的贡献。实际上,倾斜涡度发展常常发生于降水尚未出现的涡旋形成的初始阶段。当涡旋发展到一定程度,低涡中上升运动发展,降水开始出现引起凝结潜热释放,从而非绝热加热加强涡旋发展。就此而言,从拉格朗日观点理解在一般情形下倾斜涡度发展是如何发生的就显得更重要和更实用了。

2 倾斜等熵面上的倾斜涡度发展

将三维位温梯度 $\nabla\theta$ 与垂直方向的锐角夹角定义为 $\beta \in [0, \frac{\pi}{2})$, 即 $\tan\beta = \frac{\theta_s}{|\theta_z|}$; 并将水平涡度 η_s 和斜压度 θ_s 夹角定义为 $\epsilon \in [0, \pi]$; 于是

$$C_D = \begin{cases} \frac{\eta_s \theta_s \cos\epsilon}{\theta_z} = \eta_s \cos\epsilon \tan\beta & (\theta_z > 0) \\ \frac{\eta_s \theta_s \cos\epsilon}{\theta_z} = -\eta_s \cos\epsilon \tan\beta & (\theta_z < 0) \end{cases} \quad (10)$$

其中, $\eta_s = |\eta_s|$ 和 $\theta_s = |\theta_s|$ 。

由

$$\nabla\theta = \theta_x \mathbf{i} + \theta_y \mathbf{j} + \theta_z \mathbf{k} = \theta_s \mathbf{s} + \theta_z \mathbf{k} = \theta_n \mathbf{n} \quad (11)$$

其中,单位向量 $\mathbf{n}$ 是三维位温梯度 $\nabla\theta$ 的方向,单位向量 $\mathbf{s}$ 是位温水平梯度 $\nabla_s\theta$ 的方向。

可得

$$PV_e = \begin{cases} \eta_s \cdot \nabla\theta = \eta_n \theta_n > 0, & \Rightarrow \eta_n > 0 \quad (\theta_z > 0) \\ \eta_s \cdot \nabla\theta = \eta_n \theta_n < 0, & \Rightarrow \eta_n < 0 \quad (\theta_z < 0) \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\eta_n = \eta_s \cdot \mathbf{n}$ 是单位质量绝对涡度 η_s 在 $\mathbf{n}$ 方向的投影。

因此,式(1)可写为

$$\eta_z = \begin{cases} \frac{\eta_n}{\cos\beta} - \eta_s \cos\epsilon \tan\beta & (\theta_z > 0) \\ -\frac{\eta_n}{\cos\beta} - \eta_s \cos\epsilon \tan\beta & (\theta_z < 0) \end{cases} \quad (13)$$

如果 $C_D < 0$, 因为 η_s 和 β 都是正的,由式(10)可得

$$\begin{cases} \cos\epsilon < 0, & \Rightarrow \epsilon \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \quad (\theta_z > 0) \\ \cos\epsilon > 0, & \Rightarrow \epsilon \in [0, \frac{\pi}{2}) \quad (\theta_z < 0) \end{cases} \quad (14)$$

根据式(12)和(14),式(13)可写成

$$\eta_z = \frac{|\eta_n|}{\cos\beta} + \eta_s |\cos\epsilon| \tan\beta \quad (15)$$

在 $C_D < 0$ 条件下,对式(15)求 β 导数得

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_z}{d\beta} &= \left(\frac{|\eta_n| \sin\beta}{\cos^2\beta} + \frac{\eta_s |\cos\epsilon|}{\cos^2\beta} \right) + \left(\frac{d|\eta_n|}{d\beta} \frac{1}{\cos\beta} + \right. \\ &\quad \left. \frac{d\eta_s}{d\beta} |\cos\epsilon| \tan\beta + \eta_s \frac{d|\cos\epsilon|}{d\beta} \tan\beta \right) \end{aligned} \quad (16)$$

当 $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时,式(16)右端第1个括号中的两项是2阶趋于无穷,而第2个括号中的3项是1阶趋于无穷,因此,

$$\frac{d\eta_z}{d\beta} \rightarrow \infty \quad (\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}) \quad (17)$$

表明空气质点沿着向上凸的陡峭等熵面下滑或沿着向下凹的陡峭等熵面上滑过程,如果 $C_D < 0$,那么垂直涡度将剧烈发展。

假设在稳定(不稳定)大气中,水平涡度 η_s 和斜压度 θ_s 是严格反向(同向),即当 $\theta_z > 0$ ($\theta_z < 0$) 时 $\epsilon = \pi$ ($\epsilon = 0$),即 $C_D < 0$,并假设 θ_n 不变也就是 η_n 不变(因为 $PV_e = \eta_n \theta_n$ 守恒),于是式(15)变成

$$\eta_z = \frac{|\eta_n|}{\cos\beta} + \eta_s \tan\beta, \quad \Rightarrow \eta_z \rightarrow \infty \quad (\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}) \quad (18)$$

式(18)可以通过示意图2(示意图3)解释稳定(不稳定)大气中的下滑倾斜涡度发展。式(18)也可以解释稳定或不稳定大气中的上滑倾斜涡度发展,因为上滑和下滑倾斜涡度发展没有本质区别,因此,这里省略上滑倾斜涡度发展的示意图。初始时刻,空气质点位于位置 A^0 ,由于该处等熵面是水平的,因此, $C_D = 0$;质点在稳定(不稳定)大气中绝热下滑过程,因为水平涡度(η_s)和斜压度(θ_s)是严格反向(同向);于是当质点沿着同一等熵面从位置 A^0 下滑到位置 A 时,其垂直绝对涡度 η_z 迅速增大。

值得指出的是,以上分析只是定性展示倾斜涡度发展的理想模型,即在 $C_D < 0$ 假设前提下,如果空气质点沿着陡峭等熵面移动即 β 快速增加,那么垂直涡度才会急剧发展。

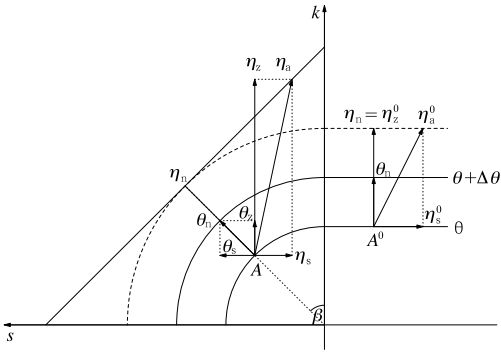


图2 水平涡度 η_s 和斜压度 θ_s 严格反向时,在稳定大气中等熵面倾斜引起的垂直涡度发展的示意图 (初始时刻,空气质点位于等熵面是水平的位置 A^0 , 位涡 $PV_e = \eta_s \theta_n$ 守恒;当空气质点沿着等熵面下滑

β 角度到达位置 A , 根据 $\eta_z = \frac{|\eta_s|}{\cos \beta} + \eta_s \tan \beta$,

可见 β 增大引起垂直涡度 η_z 发展)

Fig. 2 Schematic diagram showing the development of vertical vorticity in a stable atmosphere owing to the slantwise sloping of the isentropic surface when the directions of horizontal vortical η_s and baroclinity θ_s are opposite. Initially, a particle is at position A^0 on the horizontal part of a θ surface, and $PV_e = \eta_s \theta_n$ is conserved.

When it slides down the θ surface at an angle β

to position A , due to $\eta_z = \frac{|\eta_s|}{\cos \beta} + \eta_s \tan \beta$,

the increasing in β can result in the development of η_z

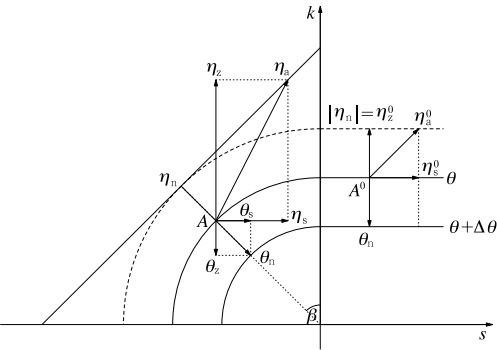


图3 同图2,但为水平涡度 η_s 和斜压度 θ_s 严格同向时,在不稳定大气中等熵面倾斜引起的垂直涡度发展的示意图

Fig. 3 As in Fig. 2 but for the unstable atmosphere case when the directions of horizontal vortical η_s and baroclinity θ_s are strictly identical

3 广义倾斜涡度发展

以上倾斜涡度发展理论是基于等熵坐标并假设

等熵面倾角 β 随时间增大。由于 $\frac{d\eta_z}{dt} = \frac{d\eta_z}{d\beta} \frac{d\beta}{dt}$, 因此,等熵面倾角 β 随时间的变化必须分析。在倾斜涡度发展应用中,这个分析非常不方便且常常被忽略。从实用和一般化角度出发,下面将从拉格朗日观点来研究倾斜涡度发展。

3.1 涡度发展

在 PV_e 守恒条件下,对式(1)求时间导数得

$$\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A = -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt} - \frac{dC_D}{dt} \quad (\theta_z \neq 0) \quad (19)$$

其中, $\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A$ 表示垂直涡度的绝热发展。因此,涡度发展的充分必要条件是

$$\frac{dC_D}{dt} < -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt} \quad (\theta_z \neq 0) \quad (20)$$

这与 Wu 等(1997)给出的充分必要条件式(3)是一致的,只是形式不同而已。

3.2 倾斜涡度发展

如果

$$\frac{dC_D}{dt} < 0 \quad (21)$$

则式(19)可写成

$$\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A = -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt} + \left|\frac{dC_D}{dt}\right| \quad (\theta_z \neq 0) \quad (22)$$

如果

$$\frac{dC_D}{dt} < 0 < -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt} \quad (\theta_z \neq 0) \quad (23)$$

则由式(22)可得

$$\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A \rightarrow \infty \quad (|\theta_z| \rightarrow 0) \quad (24)$$

这意味着当式(23)满足时,如果大气稳定度趋于中性,空气质点的垂直涡度将迅速发展。

对于惯性稳定大气, PV_e 的符号和 θ_z 的符号一般是一致的。在此情形下,式(23)可以解释为

$$\begin{cases} \frac{d\theta_z}{dt} < 0 & \text{且} & \frac{dC_D}{dt} < 0 & (\theta_z > 0) \\ \frac{d\theta_z}{dt} > 0 & \text{且} & \frac{dC_D}{dt} < 0 & (\theta_z < 0) \end{cases} \quad (25)$$

于是倾斜涡度发展可以描述为“在空气质点沿着向上凸的陡峭等熵面下滑或沿着向下凹的陡峭等熵面上滑过程中,如果 C_D 减小,当稳定大气的静力稳定度(θ_z)减小或当不稳定大气的静力稳定度(θ_z)增大时,垂直涡度将强烈发展。即在空气质点沿着向上凸的陡峭等熵面下滑或沿着向下凹的陡峭等熵面上滑过程中,如果 C_D 减小,当静力稳定度 $\theta_z \rightarrow 0$ 即大

气趋于中性层结时,空气质点的垂直涡度将会迅速加强。”

3.3 涡度发展和倾斜涡度发展的关系

对涡度发展的充分必要条件式(20)进行时间积分得

$$\Delta C_D < \int_t^{t+\Delta t} -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt} dt = -\left(\frac{PV_e}{\theta_z^2}\right)^* \Delta\theta_z \quad (\theta_z \neq 0) \quad (26)$$

其中, $\Delta C_D = C_D(t+\Delta t) - C_D(t)$, $\Delta\theta_z = \theta_z(t+\Delta t) - \theta_z(t)$ 。

令

$$\Gamma = -\left(\frac{PV_e}{\theta_z^2}\right)^* \Delta\theta_z \quad (\theta_z \neq 0) \quad (27)$$

当大气是静力稳定($\theta_z > 0$, 从而 $PV_e > 0$), 并且, 静力稳定度减小($\Delta\theta_z < 0$), 或大气是静力不稳定($\theta_z < 0$, 从而 $PV_e < 0$), 并且, 静力稳定度增大($\Delta\theta_z > 0$), 则有 $\Gamma > 0$ 。在此情形下, 涡度发展的充分必要条件式(26)变成

$$\Delta C_D < \Gamma \quad (28)$$

另一方面, 对倾斜涡度发展的充分必要条件式(21)进行时间积分得

$$\Delta C_D < 0 \quad (29)$$

比较式(28)、(29), 可见倾斜涡度发展的要求比涡度发展的要求严格很多, 说明强烈天气的发生几率比一般天气的发生几率小很多。

3.4 PV_2 和倾斜涡度发展的关系

倾斜涡度发展的充分必要条件式(23)可以写成

$$\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt} - \frac{PV_2}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt} < 0 < -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt} \quad (\theta_z \neq 0) \quad (30)$$

在不等式(30)加上 $\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt}$, 然后乘以 -1 得

$$-\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt} - \frac{\eta_z}{\theta_z} \frac{d\theta_z}{dt} > -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt} > 0 \quad (\theta_z \neq 0) \quad (31)$$

在 PV_e 守恒条件下, 式(9)变成

$$\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A = -\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt} - \frac{\eta_z}{\theta_z} \frac{d\theta_z}{dt} > -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt} > 0 \quad (\theta \neq 0) \quad (32)$$

这就是倾斜涡度发展与 PV_2 变化的关系, 表明在稳定(不稳定)大气中, PV_2 减小(增大)将会引起垂直涡度的发展。倾斜涡度发展的强度依赖于大气的静力稳定度

$$\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A > PV_e \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\theta_z}\right) > 0 \quad (\theta_z \neq 0) \quad (33)$$

式(33)表明当 $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\theta_z}\right) > 0$, 而且, 垂直涡度的绝热变化 $\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A$ 超过 $PV_e \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\theta_z}\right)$ 时的涡度发展才能称为倾斜涡度发展。在对称稳定大气中有 $PV_e > 0$, 因此, 当静力稳定度 θ_z 减小并趋于中性层结时, 倾斜涡度发展将发生, 从而引起剧烈天气的发生。

4 一次青藏高原低涡的 PV - θ 分析

本文采用的数据和计算方法与本研究的第1部分完全一样。第1部分采用式(9)来诊断2008年7月下旬的一次青藏高原低涡的发展和移动过程; 该低涡在20日前形成于青藏高原上, 21日18时起开始移出青藏高原, 然后继续沿着长江流域东移; 给沿途地区带来了强降水。结果显示位涡(PV_e)变化对垂直涡度(η_z)的贡献($\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_e}{dt}$)与垂直涡度(η_z)的总变化($\frac{d\eta_z}{dt}$)非常类似且量级相当; PV_2 变化对垂直涡度(η_z)的贡献($-\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt}$)的正中心与青藏高原低涡的垂直涡度发展中心吻合但量级偏小; 而当静力稳定大气的静力稳定度(θ_z)增大时, 静力稳定度 θ_z 变化对垂直涡度(η_z)的贡献($-\frac{\eta_z}{\theta_z} \frac{d\theta_z}{dt}$)是负的, 或当稳定(不稳定)大气的静力稳定度(θ_z)减小(增大)时其贡献是正的。同时本研究第1部分表明, 非绝热加热垂直和水平方向的非均匀性在青藏高原低涡的发展和移动过程中起主要作用。然而, 在低涡演变的某些阶段, 绝热项 $-\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt}$ 对涡旋的发展起着与非绝热加热相似的显著作用。例子之一是2008年7月22日当青藏高原低涡沿着四川省东北边山脉的斜坡爬升时。如本研究第1部分图2所示, 2008年7月22日00时青藏高原低涡附近的面平均6h降水达到13mm, 而且, 2008年7月22日06时低涡中心最大垂直相对涡度加强达到 $2 \times 10^{-4} s^{-1}$ 。图4是此时段的垂直涡度(η_z)总变化、位涡(PV_e)变化和非绝热加热(Q)纬向垂直分布。青藏高原低涡的垂直涡度发展(图4a₁—c₁)和非绝热加热 Q (图4a₃—c₃)表明低涡的强度和降水在12h内迅速发展。更重要的是, 非绝热加热项 $\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_e}{dt}$ (图4a₂—

c_2)非常显著,其强度与垂直涡度总变化 $\frac{d\eta_z}{dt}$ 非常接近。此外,非绝热加热项的最大中心高度从21日18

时的2 km上升至22日00时的3 km,最后在22日06时达到4 km,从而增强涡旋的垂直延伸。

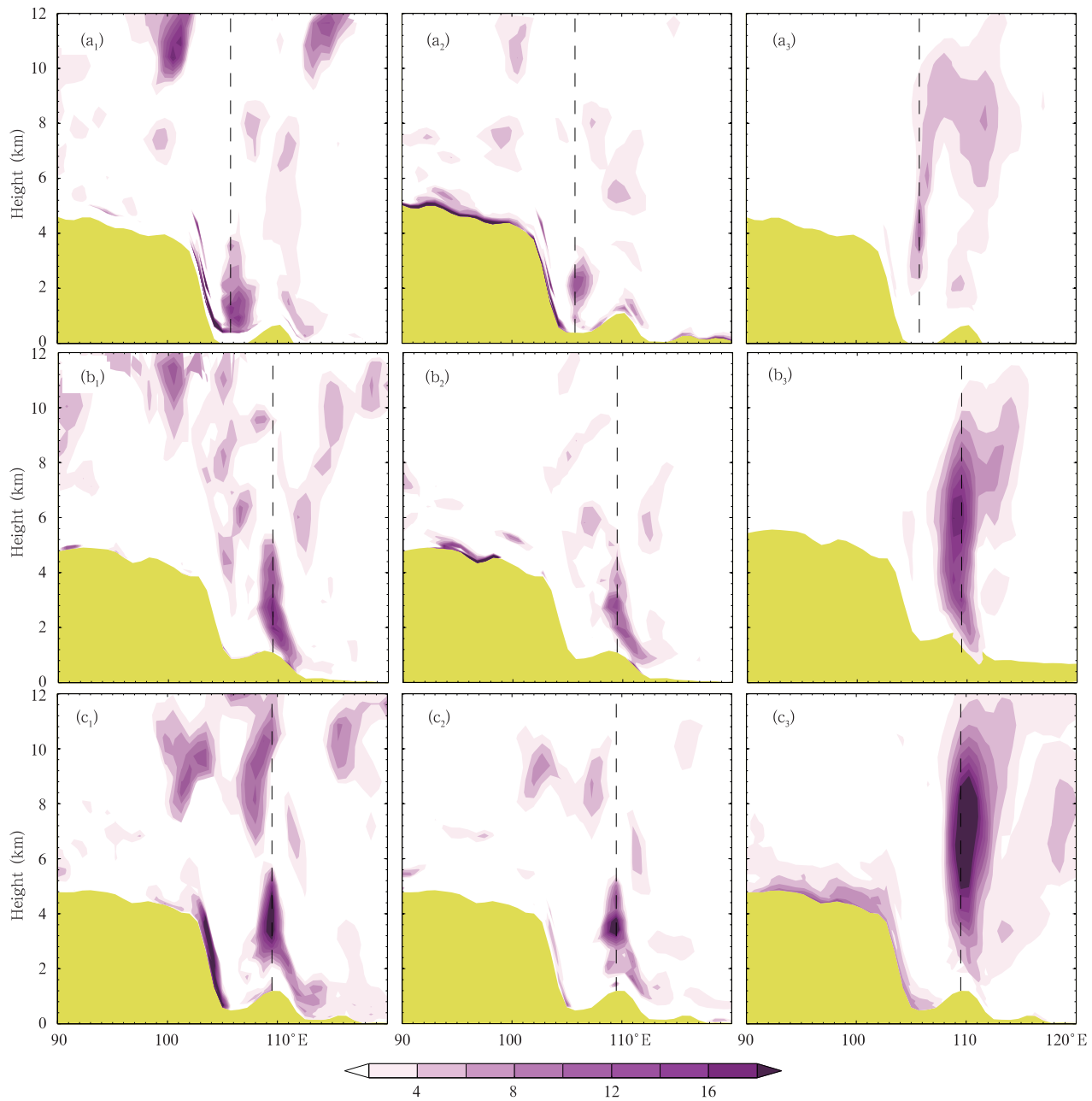


图4 2008年7月21—22日通过青藏高原低涡中心的纬向垂直剖面

(a. 21日18时, b. 22日00时, c. 22日06时; 垂直虚线表示低涡中心位置, $a_1 - c_1$, $a_2 - c_2$, $a_3 - c_3$ 中的阴影分别是垂直涡度 η_z 的总变化 $\frac{d\eta_z}{dt}$ (单位: $10^{-5} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s} \cdot 6 \text{ h})$), 位涡的拉格朗日变化 $\frac{dPV_e}{dt}$ (单位: $10^{-1} \text{ PVU}/6 \text{ h}$) 和非绝热加热 Q (单位: $\text{K}/6 \text{ h}$))

Fig. 4 Zonal vertical cross-sections across the center of the TPV at (a_1 , a_2 , a_3) 18:00 UTC 21, (b_1 , b_2 , b_3) 00:00 UTC 22 (b), and (c_1 , c_2 , c_3) 06:00 UTC 22 July 2008. The vertical dashed line denotes the center of TPV.

The shadings in a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 , and a_3 , b_3 , c_3 columns are the Lagrangian change of η_z ($\frac{d\eta_z}{dt}$; $10^{-5} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s} \cdot 6 \text{ h})$, the Lagrangian change of PV_e ($\frac{dPV_e}{dt}$; $10^{-1} \text{ PVU}/6 \text{ h}$), and Q ($\text{K}/6 \text{ h}$), respectively

图 5 是 2008 年 7 月 22 日 00 和 06 时的 330 和 315 K 等熵面上的 $\frac{dC_D}{dt} = \frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt} - \frac{PV_2}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt}$, $\gamma = -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt}$ 和 $\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A = \gamma - \frac{dC_D}{dt}$ 分布。可见 00 时在 330 和 315 K 等熵面的环绕低涡中心附近有 $\frac{dC_D}{dt}$

$> \gamma$ 且 $\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A < 0$, 意味着涡度发展判据式 (20) 不满足, 因此, 此时低涡发展基本是由于非绝热加热引起的, 与本研究第 1 部分的结论吻合。06 时在 315 K 等熵面的低涡中心附近有 $\frac{dC_D}{dt} < \gamma$ 且 $\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A > 0$, 意

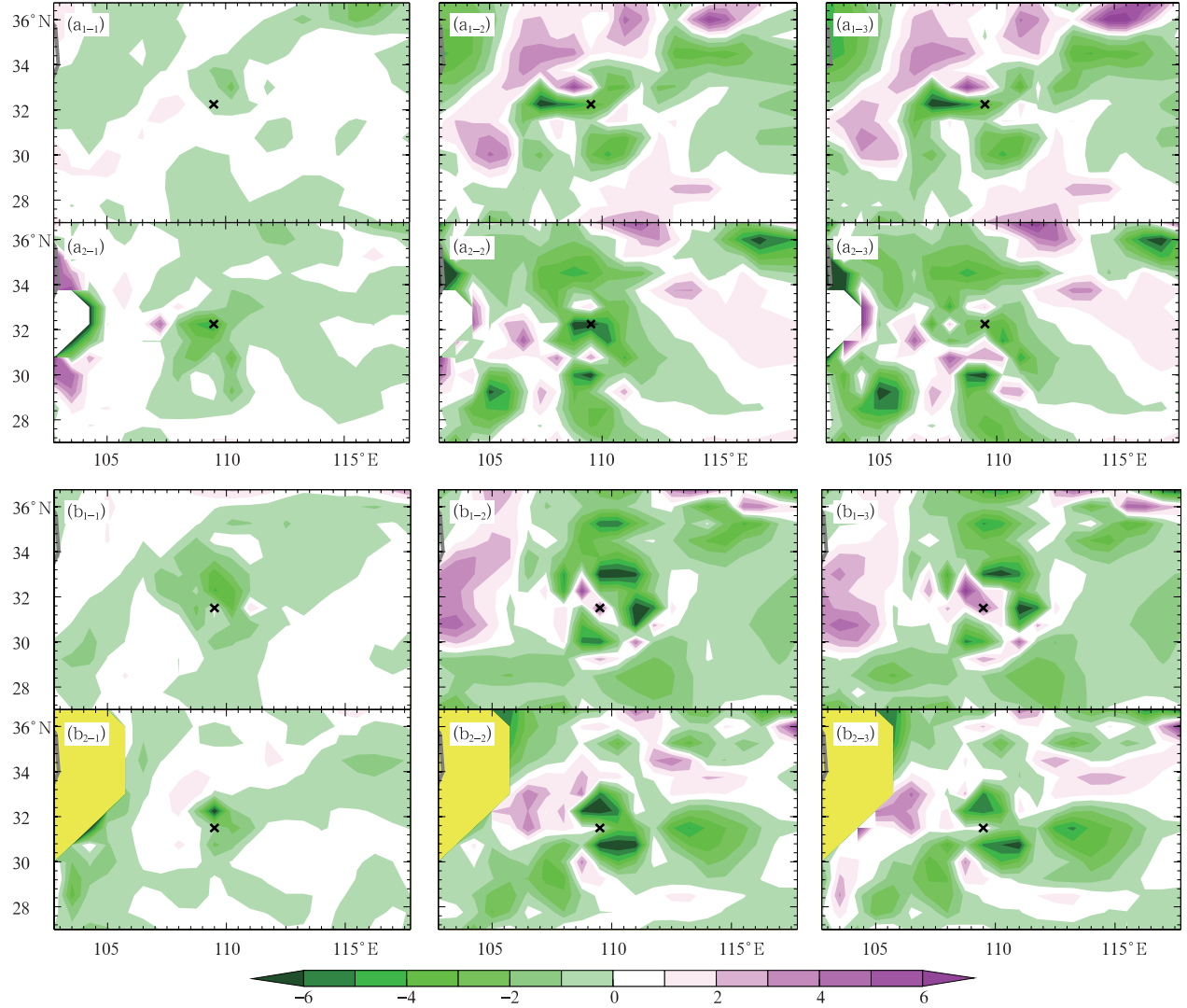


图 5 2008 年 7 月 22 日 330 K (a_1, b_1)、315 K (a_2, b_2) 等熵面上的 $\frac{dC_D}{dt} = \frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt} - \frac{PV_2}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt}$ ($a_{1-1}, a_{2-1}, b_{1-1}, b_{2-1}$)、

$\gamma = -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt}$ ($a_{1-2}, a_{2-2}, b_{1-2}, b_{2-2}$) 和 $\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A = \gamma - \frac{dC_D}{dt}$ ($a_{1-3}, a_{2-3}, b_{1-3}, b_{2-3}$) 的分布

(a, 00 时; b, 06 时; 阴影单位: $10^{-5} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s} \cdot 6 \text{ h})$, $\times$ 表示青藏高原低涡的中心位置, 下同)

Fig. 5 Distributions on the 330 (a_1, b_1) and 315 K (a_2, b_2) isentropic surfaces of $\frac{dC_D}{dt} = \frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt} - \frac{PV_2}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt}$

($a_{1-1}, a_{2-1}, b_{1-1}, b_{2-1}$), $\gamma = -\frac{PV_e}{\theta_z^2} \frac{d\theta_z}{dt}$ ($a_{1-2}, a_{2-2}, b_{1-2}, b_{2-2}$), and $\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A = \gamma - \frac{dC_D}{dt}$ ($a_{1-3}, a_{2-3}, b_{1-3}, b_{2-3}$)

at (a) 00:00 UTC and (b) 06:00 UTC 22 July 2008. The unit of shading is $10^{-5} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s} \cdot 6 \text{ h})$

The cross means the location of the TPV, the same for following figures

意味着涡度发展判据式(20)满足,因此,绝热过程至少对低涡在低层的发展起了部分贡献;但是,由于315 K等熵面上 $\gamma < 0$,倾斜涡度发展判据式(23)不满足,因此,低涡的绝热发展是有限的。然而在330 K等熵面低涡中心附近,不仅 $\frac{dC_D}{dt} < \gamma$,且 $\frac{dC_D}{dt} < 0 < \gamma$,意味着涡度发展判据式(20)与倾斜涡度发展判据式(23)同时满足,因此,涡度发展和倾斜涡度发展同时发生。这与图4中该低涡系统在22日06时向高层发展加强是一致的。

如式(32)所示,垂直涡度的绝热发展 $\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_A$ 可

分解为如下两部分:由于位涡水平分量(PV_2)变化引起的部分 $\left(-\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt}\right)$,以及由于静力稳定度(θ_z)变化引起的部分 $\left(-\frac{\eta_z}{\theta_z} \frac{d\theta_z}{dt}\right)$ 。其中, PV_2 变化引起的垂直涡度绝热发展可以表述为

$$\left(\frac{d\eta_z}{dt}\right)_{PV_2} = -\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt} = -\frac{1}{\theta_z} \frac{d(\boldsymbol{\eta}_s \cdot \boldsymbol{\theta}_s)}{dt} = -\frac{d\boldsymbol{\eta}_s \cdot \boldsymbol{\theta}_s}{dt} - \frac{\boldsymbol{\eta}_s \cdot d\boldsymbol{\theta}_s}{\theta_z} \quad (\theta_z \neq 0) \quad (34)$$

图6显示2008年7月22日的330、315 K等熵面的式(34)中3项以及垂直涡度的总变化的分布。

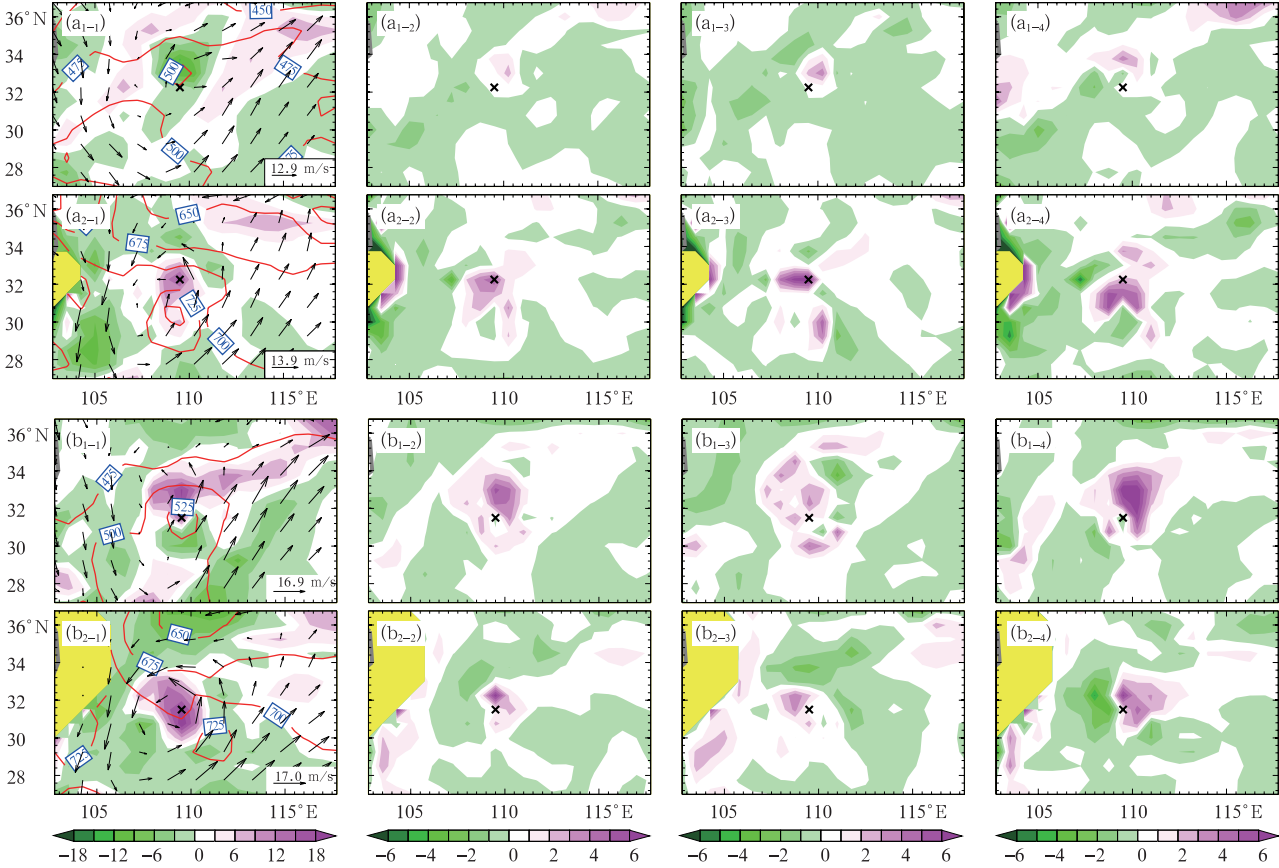


图6 2008年7月22日330 K(a_1, b_1)、315 K(a_2, b_2)的垂直涡度 η_z 发展($a_{1-1}, a_{2-1}, b_{1-1}, b_{2-1}$, 阴影, 单位: $10^{-5} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s} \cdot 6 \text{ h})$,等值线为气压,单位:hPa,向量为水平风),及相应的位涡水平分量变化 $-\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt}$ ($a_{1-2}, a_{2-2}, b_{1-2}, b_{2-2}$),水平涡度变化 $-\frac{\boldsymbol{\theta}_s}{\theta_z} \cdot \frac{d\boldsymbol{\eta}_s}{dt}$ ($a_{1-3}, a_{2-3}, b_{1-3}, b_{2-3}$),斜压度变化 $-\frac{\boldsymbol{\eta}_s}{\theta_z} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}_s}{dt}$ ($a_{1-4}, a_{2-4}, b_{1-4}, b_{2-4}$) 对垂直涡度发展的贡献(阴影,单位: $0.5 \times 10^{-5} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s} \cdot 6 \text{ h})$)(a, 00时, b, 06时)
Fig. 6 Development on the 330 (a_1, b_1) and 315 K (a_2, b_2) isentropic surface of vertical vorticity η_z ($a_{1-1}, a_{2-1}, b_{1-1}, b_{2-1}$; $10^{-5} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s} \cdot 6 \text{ h})$), and the associated contributions due to the changes in horizontal potential vorticity $-\frac{1}{\theta_z} \frac{dPV_2}{dt}$ ($a_{1-2}, a_{2-2}, b_{1-2}, b_{2-2}$), horizontal vorticity $-\frac{\boldsymbol{\theta}_s}{\theta_z} \cdot \frac{d\boldsymbol{\eta}_s}{dt}$ ($a_{1-3}, a_{2-3}, b_{1-3}, b_{2-3}$), and baroclinity $-\frac{\boldsymbol{\eta}_s}{\theta_z} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}_s}{dt}$ ($a_{1-4}, a_{2-4}, b_{1-4}, b_{2-4}$) at (a) 00:00 UTC and (b) 06:00 UTC 22 July 2008. The contour and vector in the first column are pressure in hPa and horizontal wind, respectively. The unit of shading in the last three columns is $0.5 \times 10^{-5} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s} \cdot 6 \text{ h})$

清楚可见水平涡度(η_s)变化和斜压度(θ_s)变化对垂直涡度发展起着正贡献。图1表明 $PV_2 = \eta_s \cdot \theta_s$ 通常是负的,即水平涡度(η_s)和斜压度(θ_s)反向。式(34)右端两项对垂直涡度发展起正贡献表明垂直涡度发展过程中 η_s 的变化与 θ_s 反向,并且, θ_s 的变化与 η_s 反向。因此,无论是水平涡度(η_s)还是斜压度(θ_s),其在投影方向的分量增大,垂直涡度发展。这证实了 Wu 等(1997)的结论,垂直涡度发展不一定是由涡旋的非均匀抬升将水平涡度向垂直涡度转换得到的。即垂直涡度增大不一定要求水平涡度减小,而可以通过水平涡度(η_s)或者斜压度(θ_s)在投影方向的分量增大来实现。总的来说,水平涡度(η_s)的动力作用和斜压度(θ_s)的热力作用对垂直涡度发展起正贡献。

5 结论与讨论

本研究的第1部分主要研究非绝热加热对垂直涡度发展的贡献,本文主要从位涡-位温($PV-\theta$)观点和拉格朗日观点研究垂直涡度的绝热发展。

首先强调了在大多数情形下对流层满足静力稳定和地转平衡,即 C_D 和 PV_2 一般为负的。因此,仅仅使用 $C_D < 0$ 作为等熵面倾斜涡度发展的判据是不够的,要判断等熵面倾斜涡度发展是否发生,还必须判断等熵面倾角 β 是否随时间增大。而等熵面倾角 β 的变化与斜压度 θ_s 变化和静力稳定度(θ_z)变化有关,这在业务或实际使用中非常不方便。

然后,从拉格朗日观点引入了广义倾斜涡度发展与坐标无关的涡度发展概念框架。通过给出涡度发展和倾斜涡度发展的判据清楚区分涡度发展和倾斜涡度发展。涡度发展的判据是 $\frac{dC_D}{dt} < \gamma$, 其中, $\gamma = -\frac{PV_c}{\theta_z} \frac{d\theta_z}{dt}$, $\theta_z \neq 0$; 而倾斜涡度发展的判据是 $\frac{dC_D}{dt} < 0 < \gamma$ 。可见倾斜涡度发展的要求比涡度发展的要求严格得多。与此相对应,涡度发展仅意味着 $\frac{d\eta_z}{dt} > 0$, 而倾斜涡度发展意味着 $\frac{d\eta_z}{dt} > PV_c \cdot \frac{d}{dt}(\frac{1}{\theta_z})$, 其在 θ_z 趋于中性层结时可急剧增长。这也说明了为什么锋面和气旋系统经常发生而剧烈天气极少发生。在广义倾斜涡度发展框架下,在空气质

点沿着向上凸的陡峭等熵面下滑或沿着向下凹的陡峭等熵面上滑过程中,如果 C_D 减小,当稳定大气的静力稳定度(θ_z)减小或当不稳定大气的静力稳定度(θ_z)增大时,垂直涡度将激烈发展。即在空气质点沿着向上凸的陡峭等熵面下滑或沿着向下凹的陡峭等熵面上滑过程中,如果 C_D 减小,当静力稳定度 $\theta_z \rightarrow 0$ 时即大气趋于中性层结时,空气质点的垂直涡度将会迅速加强。倾斜涡度发展引起的垂直涡度绝热发展的强度可用 $\frac{d\eta_z}{dt} > PV_c \cdot \frac{d}{dt}(\frac{1}{\theta_z})$ 来估计,表明当大气趋于中性层结时,垂直涡度发展趋于无穷。

应用以上理论结果分析了2008年7月下旬形成于青藏高原上,然后滑落高原并向东移,给沿途带来强降水的一次青藏高原低涡过程。在涡旋发展的某些阶段,涡度发展判据不满足,意味着涡旋发展主要是由非绝热加热引起的,这在本研究的第1部分已经讨论过;在某些阶段,涡度发展判据满足而倾斜涡度发展判据不满足,因此,涡旋的绝热发展是有限的。在某些时候,如2008年7月22日06时的330 K等熵面上,在低涡中心附近涡度发展和倾斜涡度发展的判据同时满足,因此,倾斜涡度发展引起的垂直涡度绝热发展从而对低涡加强并向上发展有正贡献。而且2008年7月22日00—06时,当青藏高原低涡沿着四川盆地东北边的斜坡爬升时,青藏高原低涡重新加强。此时水平涡度(η_s)变化和斜压度(θ_s)变化都对垂直涡度发展有贡献,说明 PV_2 变化对低涡发展有正的作用。

围绕低涡中心附近的涡度发展和倾斜涡度发展信号比周围要强得多,表明广义倾斜涡度发展概念可作为诊断强烈天气系统的一个有用工具。倾斜涡度发展已经扩展到饱和湿空气(吴国雄等,1995)并可以扩展到不饱和湿空气(Gao, et al, 2004),因此,广义倾斜涡度发展概念以后还应该扩展到湿空气以揭示夏季大暴雨等剧烈天气发生发展的机制。

本文是本研究的第2部分,其讨论的是绝热过程中,由于天气系统沿着倾斜等熵面移动中位涡守恒而诱发的垂直涡度变化,因此,大气静力稳定度的变化是非常重要的。而第1部分研究的是非绝热加热的影响,并通过个例分析指出,在多数场合非绝热加热起主要作用。在实际大气中,非绝热加热和静力稳定度是会相互影响的,其间存在复杂的反馈过

程。进一步研究这种反馈过程对天气系统发展的影响具有重要意义,是需要面对的挑战。

参考文献

陈忠明, 闵文彬, 徐茂良等. 2004. 大气运动非平衡强迫与“98.7”暴雨云团的中尺度特征. 气象学报, 62(12): 375-383

崔晓鹏, 吴国雄, 高守亭. 2002. 西大西洋锋面气旋过程的数值模拟和等熵分析. 气象学报, 60(4): 385-399

姜勇强, 陈中一, 周祖刚等. 2004. 倾斜涡度发展与 β 中尺度低涡. 解放军理工大学学报(自然科学版), 5(6): 81-87

马雷鸣, 秦曾灏, 端义宏等. 2002. 大气斜压性与入海江淮气旋发展的个例研究. 海洋学报, 24(1): 95-104

王瀛, 王元, 张立祥等. 2007. 减弱热带气旋附近的倾斜涡度发展. 热带气象学报, 23(1): 47-52

吴国雄, 蔡雅萍, 唐晓菁. 1995. 湿位涡和倾斜涡度发展. 气象学报, 53(4): 387-405

郑永骏, 吴国雄, 刘屹岷. 2013. 涡旋发展和移动的动力和热力问题 I: PV-Q 观点. 气象学报, 71(2): 185-197

Cui X P, Gao S T, Wu G X. 2003. Up-sliding slantwise vorticity development and the complete vorticity equation with mass forcing. Adv Atmos Sci, 20(5): 825-836

Gao S T, Wang X R, Zhou Y S. 2004. Generation of generalized moist potential vorticity in a frictionless and moist adiabatic flow. Geophys Res Lett, 31: L12113, doi: 10.1029/2003GL019152

Hoskins B J, McIntyre M E, Robertson A M. 1985. On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. Quart J Roy Meteor Soc, 111(470): 877-946

Wu G X, Liu H Z. 1997. Vertical vorticity development owing to down-sliding at slantwise isentropic surface. Dyn Atmos Oce, 27(1-4): 715-743