



# 抛物型方程基于 POD 方法的时间二阶精度 CN 有限元降维格式

罗振东<sup>①②\*</sup>, 陈静<sup>③\*</sup>, 谢正辉<sup>④</sup>, 安静<sup>②</sup>, 孙萍<sup>②</sup>

① 华北电力大学数理学院, 北京 102206;

② 贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵阳 550001;

③ 中国农业大学理学院, 北京 100083;

④ 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029

E-mail: zhduo@163.com.cn, jing\_quchen@163.com, zxie@lasg.iap.ac.cn, aj154@163.com, sunp@gznu.edu.cn

收稿日期: 2010-08-16; 接受日期: 2011-04-13; \* 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10871022, 11061009, 40821092)、国家基础研究项目 (批准号: 2010CB428403, 2009CB421407, 2010CB951001)、河北省自然科学基金 (批准号: A2010001663) 和中央高校基本业务费专项资金 (批准号: 2009-2-05) 项目资助

**摘要** 将特征正交分解 (proper orthogonal decomposition, 简记为 POD) 方法应用于抛物型方程通常的时间二阶精度 Crank-Nicolson (简记为 CN) 有限元格式, 简化其为一个自由度极少的时间二阶精度 CN 有限元降维格式, 并给出简化的时间二阶精度 CN 有限元解的误差分析. 数值例子表明在简化的时间二阶精度 CN 有限元解和通常的时间二阶精度 CN 有限元解之间的误差足够小的情况下, 简化的时间二阶精度 CN 有限元格式能大大地节省自由度, 而且时间步长可以比时间一阶精度的格式取大 10 倍, 以至能更快计算到所要时刻数值解, 减少计算机计算过程的截断误差, 提高计算速度和计算精度, 从而验证降维时间二阶精度 CN 有限元格式用于解类似于抛物型方程的时间依赖方程是很有效的.

**关键词** 特征正交分解 Crank-Nicolson 有限元格式 误差分析 抛物型方程

**MSC (2000) 主题分类** 65N30, 35Q10

## 1 引言

抛物型方程是一类描述物理量随时间而扩散或衰减的偏微分方程, 有许多实际应用的背景. 例如, 自然环境、工程设备及生物机体中的气体的扩散、液体的渗透、热的传导以及半导体材料中杂质的扩散等许多物理现象都可用抛物方程来描述. 对于描述实际问题的抛物型方程, 由于物理问题本身的复杂性, 其精确解往往不容易求得, 有效的方法是求其数值解. 时间二阶精度 Crank-Nicolson (简记为 CN) 有限元格式是求解抛物型方程最有效的方法之一<sup>[1, 2]</sup>, 然而, 抛物型方程通常的 CN 有限元格式的自由度太多, 对于实际计算会产生很多困难. 因此, 重要的问题是在保证其数值解具有足够高精度的情况下, 如何简化计算、节省计算量及降低内存要求.

特征正交分解 (Proper Orthogonal Decomposition, 简记为 POD) 方法能提供具有足够高精度而自由度又较少的低维模型, 从而简化计算、节省计算时间和内存<sup>[3]</sup>. 在信号分析和样本识别中, 称该方法为 Karhunen-Loève 展开<sup>[4]</sup>; 在统计学中, 称该方法为主分量分析<sup>[5]</sup>; 在地球物理的流体动力学和气象学中, 称该方法为经验正交函数方法<sup>[5, 6]</sup>. POD 方法主要提供一种有效逼近大量数据的工具, 其实

英文引用格式: Luo Z D, Chen J, Xie Z H, et al. A reduced second-order time accurate finite element formulation based on POD for parabolic equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(5): 447-460, doi: 10.1360/012010-614

质是在最小二乘意义下寻找能代表已知数据的一组正交基, 即一种求已知数据的最优逼近方法. POD 方法与某些偏微分方程数值解法相结合, 能将无限维的微分方程降成低维模型, 以至能极大地减少计算量和降低内存要求.

虽然 POD 方法已有广泛的应用, 但是最初主要是用于统计计算和流体动力学的主分量分析或寻找动力系统的主要特征量<sup>[3-15]</sup>. 直到最近十年, 才有将 POD 方法用于对偏微分方程的 Galerkin 方法做简化处理的报道<sup>[16, 17]</sup>. 近年来, 我们的研究小组将 POD 方法用于对有限差分方法和有限元方法做降维处理的研究, 给出了赤道太平洋模式、非定常的 Burgers 方程、非定常的 Navier-Stokes 方程、非定常的热传导 - 对流方程、非定常的化学蒸汽沉淀方程、抛物型方程基于 POD 方法的降维差分格式和有限元格式, 但这些格式的时间导数都是用一阶精度的差商离散, 时间精度较低<sup>[18-31]</sup>.

据我们所知, 到目前为止, 对抛物型方程只给出了基于 POD 方法的时间一阶精度的向后一步的简化有限元格式<sup>[24]</sup>, 还没有用 POD 方法对抛物型方程通常的时间二阶精度 CN 有限元格式做降维的报道. 因此, 本文将 POD 方法应用于抛物型方程通常的时间二阶精度 CN 有限元格式, 简化其成维数很低的时间二阶精度 CN 有限元格式, 并给出简化的时间二阶精度 CN 有限元解的误差分析. 最后, 用数值例子验证: 在简化的时间二阶精度 CN 有限元解和通常的时间二阶精度 CN 有限元解之间的误差足够小的情况下, 简化的时间二阶精度 CN 有限元格式比通常的时间二阶精度 CN 有限元格式节省大量自由度, 从而表明简化的时间二阶精度 CN 有限元格式用于求解类似于抛物型方程的时间依赖方程是很有效的. 虽然我们已经用 POD 方法对抛物型问题的时间向后一步的 Euler 有限元格式做了降维的处理, 效果很好<sup>[24]</sup>, 但是本文的基于 POD 方法简化的时间二阶精度 CN 有限元格式的时间步长可以比时间一阶精度格式取大 10 倍, 以至能更快计算到所关心时刻数值解, 减少计算机的截断误差, 提高计算效率和计算精度, 因此, 本文的基于 POD 方法简化的时间二阶精度 CN 有限元格式有更广泛的应用前景, 是对现有方法的改进和创新.

本文的安排如下, 第 2 节回顾抛物型方程已有的时间二阶精度 CN 有限元格式, 第 3 节详细给出 POD 方法的理论及抛物型方程基于 POD 方法简化的时间二阶精度 CN 有限元格式, 第 4 节讨论抛物型方程基于 POD 方法简化的时间二阶精度 CN 有限元格式的收敛性, 第 5 节用数值例子说明在简化的时间二阶精度 CN 降维 POD 有限元格式的优越性, 第 6 节叙述我们的结论以及一些展望.

## 2 抛物型方程通常的时间二阶精度 CN 有限元格式的回顾及瞬像的生成

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是有界的连通多角形区域. 考虑下面的抛物型方程.

**问题 I** 求  $u$  使得

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, y, t) = \varphi(x, y, t), & (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, y, 0) = \psi(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $u$  是未知函数,  $T$  为最大的时间限,  $f$  是已知的源函数,  $\varphi(x, y, t)$  和  $\psi(x, y)$  是给定的函数. 为了便于理论分析, 不失一般性, 我们在下面的理论分析中, 假定  $\varphi(x, y, t) = \psi(x, y) = 0$ .

本文用到的 Sobolev 空间是熟知的<sup>[32]</sup>. 令  $X = H_0^1(\Omega)$ , 则问题 I 的变分形式为

**问题 II** 求  $u \in X$  使得对于所有的  $t \in (0, T)$ ,  $u$  满足

$$\begin{cases} (u_t, v) + (\nabla u, \nabla v) = (f, v), & \forall v \in X, \\ u(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中  $(\cdot, \cdot)$  表示  $L^2$ -内积.

变分问题 II 的解的存在唯一性是熟知的<sup>[1,2]</sup>. 为了求问题 II 的数值解, 用时间二阶精度 CN 有限元方法去离散问题 II. 设  $N$  为正整数, 时间步长取为  $\tau = T/N$ ,  $t_n = n\tau$  ( $0 \leq n \leq N$ ). 再设  $\mathfrak{S}_h$  是  $\bar{\Omega}$  的拟一致三角形剖分<sup>[1,2,33]</sup>, 则空间  $X$  的有限元空间可取为

$$X_h = \{v_h \in X \cap C^0(\Omega); v_h|_K \in P_m(K), \forall K \in \mathfrak{S}_h\},$$

其中  $m \geq 1$ ,  $P_m(K)$  是  $K$  上次数不超过  $m$  的多项式空间. 记  $u^n = u(x, y, t_n)$ , 用  $u_h^n$  表示  $u$  的全离散逼近, 则问题 II 的时间二阶精度的 CN 全离散化格式为

**问题 III** 求  $u_h^n \in X_h$  使得对于  $1 \leq n \leq N$ ,

$$\begin{cases} (u_h^n, v_h) + \frac{\tau}{2}a(u_h^n, v_h) = -\frac{\tau}{2}a(u_h^{n-1}, v_h) + (u_h^{n-1}, v_h) + \frac{\tau}{2}(f(t_n) + f(t_{n-1}), v_h), & \forall v_h \in X_h, \\ u_h^0(x, y) = 0, & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

对于问题 III, 有下面熟知的结论<sup>[1,2]</sup>.

**定理 1** 当  $f \in L^2(\Omega)$  时, 问题 III 存在唯一的解  $u_h^n \in X_h$ , 并且当问题 II 的解满足  $u_t \in H^{m+1}(\Omega)$  和  $u_{tt} \in L^2(\Omega)$  时, 有下列的误差估计,

$$\|u^n - u_h^n\|_0 \leq C(h^{m+1} + \tau^2), \quad 1 \leq n \leq N, \quad (2.4)$$

其中这里和下文用到的  $C$  表示与  $h$  和  $\tau$  无关的常数.

这样, 只要给定  $f$  和时间步长  $\tau$  及空间步长  $h$ , 解问题 III 就可以得到解的集合  $\{u_h^n\}_{n=1}^N$ . 从中取  $L$  (一般  $L \ll N$ , 例如,  $L = 20$ ,  $N = 200$ ) 个样本点  $u_h^{n_i}(x, y)$  ( $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_L \leq N$ ), 在 POD 方法中, 这些样本点称为瞬像.

**附注 1** 在对实际问题计算时, 瞬像集合可以从实际物理过程抽取样本点, 通过插值 (或资料同化) 得到. 例如, 在解数值天气预报方程时, 可以利用以前的天气结果来构成瞬像集合, 再通过下面的 POD 方法重构瞬像集合元素得到最优 POD 基. 然后用最优 POD 基张成的子空间代替有限元空间  $X_h$ , 将数值天气预报方程降成维数很低的全离散化代数方程, 从而可以快速模拟出未来的天气变化情况, 对未来的天气变化做出快捷预报. 这对实际应用有重要的价值.

### 3 POD 基的生成和基于 POD 方法的简化有限元格式

对于上节抽取的瞬像  $u_h^{n_i}(x, y)$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ), 令  $U_i(x, y) = u_h^{n_i}(x, y)$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) 和

$$\mathcal{V} = \text{span}\{U_1, U_2, \dots, U_L\}, \quad (3.1)$$

并称  $\mathcal{V}$  为由瞬像  $\{U_i\}_{i=1}^L$  张成的空间, 其中  $\{U_i\}_{i=1}^L$  至少有一个非零元. 记  $l = \dim \mathcal{V}$ , 并用  $\{\psi_j\}_{j=1}^l$  表示  $l$  维数空间  $\mathcal{V}$  的标准正交基, 则有

$$U_i = \sum_{j=1}^l (U_i, \psi_j)_X \psi_j, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (3.2)$$

其中  $(U_i, \psi_j)_X = (\nabla u_h^{n_i}, \nabla \psi_j)$ ,  $X = H_0^1(\Omega)$ .

**定义 1** POD 方法就是求标准正交基  $\psi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) 使得对于每个  $d$  ( $1 \leq d \leq l$ ), 元素  $U_i$  ( $1 \leq i \leq L$ ) 与 (3.2) 的  $d$  项和之间的均方误差在平均意义下最小, 即求标准正交基  $\psi_j$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) 使得

$$\min_{\{\psi_j\}_{j=1}^d} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\| U_i - \sum_{j=1}^d (U_i, \psi_j)_X \psi_j \right\|_X^2 \quad (3.3)$$

满足

$$(\psi_i, \psi_j)_X = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad 1 \leq j \leq i, \quad (3.4)$$

其中  $\|U_i\|_X = \|\nabla u_h^{n_i}\|_0$ . 问题 (3.3) 和 (3.4) 的解  $\{\psi_j\}_{j=1}^d$  称为秩等于  $d$  的 POD 基.

由 (3.2) 和  $\psi_j$  的标准正交性, 可将 (3.3) 写为

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\| U_i - \sum_{j=1}^d (U_i, \psi_j)_X \psi_j \right\|_X^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\| \sum_{j=d+1}^l (U_i, \psi_j)_X \psi_j \right\|_X^2 = \sum_{j=d+1}^l \left[ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |(U_i, \psi_j)_X|^2 \right]. \quad (3.5)$$

这样, 为了使得 (3.5) 最小, 等价于求标准正交基  $\psi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) 使得

$$\max_{\{\psi_j\}_{j=1}^d} \sum_{j=1}^d \left[ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |(U_i, \psi_j)_X|^2 \right] \quad (3.6)$$

满足

$$(\psi_i, \psi_j)_X = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad 1 \leq j \leq i. \quad (3.7)$$

即 (3.3) 和 (3.4) 等价于找一个函数  $\psi$  (称为 POD 基元), 使下式在平均意义下最大,

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |(U_i, \psi)_X|^2 \quad \text{满足} \quad (\psi, \psi)_X = \|\nabla \psi\|_0^2 = 1. \quad (3.8)$$

选择一类特殊试验函数  $\psi$  为下列形式:

$$\psi = \sum_{i=1}^L a_i U_i, \quad (3.9)$$

其中  $a_i$  是  $\psi$  使得 (3.9) 保证 (3.8) 最大的待定系数. 为此, 定义

$$G((x, y), (x', y')) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L U_i(x, y) U_i(x', y') \quad (3.10)$$

及

$$R\psi = \int_{\Omega} \nabla' G((x, y), (x', y')) \nabla' \psi(x', y') dx' dy', \quad (3.11)$$

其中  $R: X \rightarrow X$ ,  $\nabla'$  表示相对于  $(x', y')$  的梯度. 直接计算有

$$\begin{aligned} (R\psi, \psi)_X &= \int_{\Omega} \nabla R\psi(x, y) \cdot \nabla \psi(x, y) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla' \nabla G((x, y), (x', y')) \cdot \nabla' \psi(x', y') dx' dy' \nabla \psi(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla U_i(x, y) \cdot \nabla' U_i(x', y') \cdot \nabla' \psi(x', y') dx' dy' \cdot \nabla \psi(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \int_{\Omega} \nabla' U_i(x', y') \cdot \nabla' \psi(x', y') dx' dy' \int_{\Omega} \nabla U_i(x, y) \cdot \nabla \psi(x, y) dx dy \\
&= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |(U_i, \psi)_X|^2.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

进一步, 有

$$(R\phi, \psi)_X = (\phi, R\psi)_X, \quad \forall \phi, \psi \in U. \tag{3.13}$$

这样,  $R$  是  $X$  上的非负定对称算子. 因此, 求 (3.8) 最大值的问题, 相当于求下面的特征值问题的最大特征值,

$$R\psi = \lambda\psi \quad \text{满足} \quad \|\nabla\psi\|_0 = 1, \tag{3.14}$$

即

$$\int_{\Omega} \nabla' G((x, y), (x', y')) \nabla' \psi(x', y') dx' dy' = \lambda\psi \quad \text{满足} \quad \|\nabla\psi\|_0 = 1, \tag{3.15}$$

其中  $\lambda$  与  $h$  和  $\tau$  有关 (因为  $\mathcal{V}$  与  $h$  和  $\tau$  有关). 将表达式 (3.9) 和  $G$  代入 (3.15) 有

$$\sum_{i=1}^L \left[ \sum_{k=1}^L \left( \frac{1}{L} \int_{\Omega} \nabla' U_i(x', y') \cdot \nabla' U_k(x', y') dx' dy' \right) a_k \right] U_i(x, y) = \sum_{i=1}^L \lambda a_i U_i(x, y), \tag{3.16}$$

即

$$\sum_{k=1}^L \left( \frac{1}{L} \int_{\Omega} \nabla' U_i(x', y') \cdot \nabla' U_k(x', y') dx' dy' \right) a_k = \lambda a_i, \quad i = 1, 2, \dots, L. \tag{3.17}$$

将上式写成矩阵形式的特征方程

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \tag{3.18}$$

其中  $\mathbf{A} = (A_{ik})_{L \times L}$ ,

$$A_{ik} = \frac{1}{L} \int_{\Omega} \nabla' U_i(x', y') \cdot \nabla' U_k(x', y') dx' dy', \quad \mathbf{v} = (a_1, a_2, \dots, a_L)^T. \tag{3.19}$$

由于  $\mathbf{A}$  是秩为  $l$  的非负定矩阵, 因此, 对应于非零的特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$ , 存在一组完备的标准正交特征向量

$$\mathbf{v}^1 = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_L^1)^T, \quad \mathbf{v}^2 = (a_1^2, a_2^2, \dots, a_L^2)^T, \quad \dots, \quad \mathbf{v}^l = (a_1^l, a_2^l, \dots, a_L^l)^T. \tag{3.20}$$

这样, 利用第一个最大的特征值对应的特征向量, 可得到 (3.3) 的最优解, 即第一个 POD 基为

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{L\lambda_1}} \sum_{i=1}^L a_i^1 U_i, \tag{3.21}$$

其中  $a_i^1$  是对应于最大特征值  $\lambda_1$  的特征向量  $\mathbf{v}^1$  的分量. 其余的 POD 基元  $\psi_i$  ( $i = 2, 3, \dots, l$ ) 可由其他的特征向量  $\mathbf{v}^i$  ( $i = 2, 3, \dots, l$ ) 的分量得到, 即

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{L\lambda_i}} \sum_{k=1}^L a_k^i U_k, \quad i = 2, 3, \dots, l. \tag{3.22}$$

利用  $\{\mathbf{v}^k\}_{k=1}^l$  的标准正交性条件, 即

$$\mathbf{v}^k \cdot \mathbf{v}^{k'} = \sum_{i=1}^L a_i^k a_i^{k'} = \begin{cases} 1, & k = k', \\ 0, & k \neq k', \end{cases} \quad (3.23)$$

有

$$\begin{aligned} (\psi_k, \psi_{k'})_X &= \int_{\Omega} \nabla \psi_k(x, y) \cdot \nabla \psi_{k'}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{L\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^L a_i^k \nabla U_i(x, y) \sum_{j=1}^L a_j^{k'} \nabla U_j(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \sum_{i=1}^L a_i^k \sum_{j=1}^L \left( \frac{1}{L} \int_{\Omega} \nabla U_i(x, y) \cdot \nabla U_j(x, y) dx dy \right) a_j^{k'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \sum_{i=1}^L a_i^k \sum_{j=1}^L A_{ij} a_j^{k'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \mathbf{v}^k \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}^{k'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \mathbf{v}^k \cdot \lambda_{k'} \mathbf{v}^{k'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_{k'}}} \lambda_{k'} \mathbf{v}^k \cdot \mathbf{v}^{k'} = \begin{cases} 1, & k = k', \\ 0, & k \neq k'. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.24)$$

这样, POD 基  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l\}$  构成一个正交集, 而且有下列的结果<sup>[11, 16]</sup>.

**命题 2** 设  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的正特征值, 而且  $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^l$  是对应的特征向量. 则秩  $d \leq l$  的 POD 基为

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{L\lambda_i}} \sum_{j=1}^L (\mathbf{v}^i)_j U_j, \quad 1 \leq i \leq d \leq l, \quad (3.25)$$

其中  $(\mathbf{v}^i)_j$  表示特征向量  $\mathbf{v}^i$  的第  $j$  个分量. 进一步, 有下列的误差公式成立,

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\| U_i - \sum_{j=1}^d (U_i, \psi_j)_X \psi_j \right\|_X^2 = \sum_{j=d+1}^l \lambda_j. \quad (3.26)$$

**证明** 命题的前半部分已经由上述讨论给出. 下面仅需证明公式 (3.26).

由于  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l$  满足 (3.14), 所以从 (3.12) 和 (3.15) 有

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |(U_i, \psi_j)_X|^2 = (R\psi_j, \psi_j)_X = \lambda_j. \quad (3.27)$$

这样, 如果前面  $d$  个特征值的和  $\sum_{j=1}^d \lambda_j$  最大, 则余下的特征值之和  $\sum_{j=d+1}^l \lambda_j$  就是最小. 因此, 从 (3.5) 和 (3.27) 有

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\| U_i - \sum_{j=1}^d (U_i, \psi_j)_X \psi_j \right\|_X^2 = \frac{1}{L} \sum_{j=d+1}^l \sum_{i=1}^L |(U_i, \psi_j)_X|^2 = \sum_{j=d+1}^l \lambda_j. \quad (3.28)$$

命题 2 证毕.

令  $X^d = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d\}$ . 定义 Ritz 投影  $P^h: X \rightarrow X_h$  (如果  $P^h$  是被限制为从  $X_h$  到  $X^d$  的 Ritz 投影时记为  $P^d$ , 使得  $P^h|_{X_h} = P^d: X_h \rightarrow X^d$  和  $P^h: X \setminus X_h \rightarrow X_h \setminus X^d$ ) 如下,

$$(\nabla P^h u, \nabla v_h) = (\nabla u, \nabla v_h), \quad \forall v_h \in X_h, \quad (3.29)$$

其中  $u \in X$ . 由 (3.29) 定义的线性算子  $P^h$  有下面性质,

$$\|\nabla(P^d u)\|_0 \leq \|\nabla u\|_0, \quad \forall u \in X. \quad (3.30)$$

值得注意的是, 这里定义的算子与 [16, 17] 的不同, 因此, 下面的相关结论必须重新证明.

**引理 3** 对于每个  $d$  ( $1 \leq d \leq l$ ), 投影算子  $P^d$  满足

$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \|\nabla(u_h^{n_i} - P^d u_h^{n_i})\|_0^2 \leq \sum_{j=d+1}^l \lambda_j, \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \|u_h^{n_i} - P^d u_h^{n_i}\|_0^2 \leq Ch^2 \sum_{j=d+1}^l \lambda_j, \quad (3.32)$$

其中  $u_h^{n_i} \in \mathcal{V}$  是问题 III 的解.

**证明** 对于任意的  $u \in X$ , 由 (3.29) 有

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - P^h u)\|_0^2 &= (\nabla(u - P^h u), \nabla(u - P^h u)) = (\nabla(u - P^h u), \nabla(u - v_h)) \\ &\leq \nu \|\nabla(u - P^h u)\|_0 \|\nabla(u - v_h)\|_0, \quad \forall v_h \in X_h. \end{aligned}$$

因此有

$$\|\nabla(u - P^h u)\|_0 \leq \|\nabla(u - v_h)\|_0, \quad \forall v_h \in X_h. \quad (3.33)$$

如果  $u = u_h^{n_i}$ , 而且  $P^h$  是被限制为从  $X_h$  到  $X^d$  的 Ritz 投影使得  $P^h|_{X_h} = P^d: X_h \rightarrow X^d$ , 即  $P^h u_h^{n_i} = P^d u_h^{n_i} \in X^d$ , 在 (3.33) 中取  $v_h = \sum_{j=1}^d (u_h^{n_i}, \psi_j)_X \psi_j \in X^d$ , 由 (3.28) 得 (3.31).

为了证明 (3.32), 我们考虑下面的变分问题,

$$(\nabla w, \nabla v) = (u - P^h u, v), \quad \forall v \in X. \quad (3.34)$$

则  $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  而且满足  $\|w\|_2 \leq C\|u - P^h u\|_0$ . 在 (3.34) 中取  $v = u - P^h u$ , 由 (3.29) 得

$$\begin{aligned} \|u - P^h u\|_0^2 &= (\nabla w, \nabla(u - P^h u)) = (\nabla(w - w_h), \nabla(u - P^h u)) \\ &\leq \|\nabla(w - w_h)\|_0 \|\nabla(u - P^d u)\|_0, \quad \forall w_h \in X_h. \end{aligned} \quad (3.35)$$

取  $w_h = \pi_h w$  为  $w$  在  $X_h$  上的插值, 则由插值理论 [2, 33] 和 (3.35) 得

$$\|u - P^h u\|_0^2 \leq Ch\|w\|_2 \|\nabla(u - P^h u)\|_0 \leq Ch\|u - P^h u\|_0 \|\nabla(u - P^h u)\|_0,$$

即得

$$\|u - P^h u\|_0 \leq Ch\|\nabla(u - P^h u)\|_0. \quad (3.36)$$

这样, 如果  $u = u_h^{n_i}$ , 而且  $P^h$  是被限制为从  $X_h$  到  $X^d$  的 Ritz 投影, 即  $P^h u_h^{n_i} = P^d u_h^{n_i} \in X^d$ , 则由 (3.36) 和 (3.31) 即得 (3.32). 引理 3 证毕.

利用  $X^d$  可以将问题 III 简化为下面基于 POD 方法的时间二阶精度 CN 有限元格式.

**问题 IV** 求  $u_d^n \in X^d$  使得

$$\begin{cases} (u_d^n, v_d) + \frac{\tau}{2}a(u_d^n, v_d) = -\frac{\tau}{2}a(u_d^{n-1}, v_d) + (u_d^{n-1}, v_h) \\ \quad + \frac{\tau}{2}(f(t_n) + f(t_{n-1}), v_h), \quad \forall v_d \in X^d, \quad 1 \leq n \leq N, \\ u_d^0 = g_h(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (3.37)$$

由于  $2(u_d^n, v_d) + \tau(\nabla u_d^n, \nabla v_d)$  在  $X^d$  中正定, 所以问题 IV 存在唯一的解  $(u_d^n, p_d^n) \in X^d$ .

**附注 2** 当  $\mathfrak{S}_h$  是三角形剖分而且  $X_h$  是分片一次插值多项式空间时, 问题 III 的总体自由度 (即未知量) 的数目为  $N_h$  (其中  $N_h$  为  $\mathfrak{S}_h$  中三角形顶点数目), 而问题 IV 的自由度为  $d$  ( $d \ll l \leq L \ll N$ ). 对于科学工程实际问题,  $\mathfrak{S}_h$  中三角形顶点数目是数以万计的, 甚至上亿的, 而  $d$  只是从  $N$  个瞬时解中取出的很少的  $L$  个瞬像所对应的一些最大特征值个数, 是很小很小的 (例如, 在第 5 节的例子中,  $d = 6$ , 而  $N_h = 200 \times 200 = 40000$ ), 因此, 问题 IV 是问题 III 基于 POD 方法的一个简化的时间二阶精度 CN 有限元格式. 另外, 很多自然现象的未来发展都受到以前的信息影响, 例如, 生物进化和天气变化等现象, 我们这里的方法是利用已有资料构造出 POD 基, 就包含有过去资料的信息, 因此, 这种方法不但可以节省计算量, 而且能更好地利用现有信息捕捉自然现象的未来发展规律.

#### 4 基于 POD 方法的简化时间二阶精度 CN 有限元解的误差估计

本节, 我们借助于通常的有限元方法, 给出基于 POD 方法的简化时间二阶精度 CN 有限元格式问题 IV 的解的误差估计. 为此, 需要引入下面离散的 Gronwall 引理 [2].

**引理 4** 若  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  是正数列,  $\{c_n\}$  是单调递增而且满足

$$a_n + b_n \leq c_n + \bar{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} a_j, \quad n \geq 1, \quad \bar{\lambda} > 0; \quad a_0 + b_0 \leq c_0,$$

则

$$a_n + b_n \leq c_n \exp(n\bar{\lambda}), \quad n \geq 0. \quad (4.1)$$

对于时间二阶精度的 CN 有限元降维格式, 即问题 IV 的解的误差估计, 有下面的主要结果.

**定理 5** 如果  $u_h^n \in X_h$  是问题 III 的解,  $u_d^n \in X^d$  是问题 IV 的解, 则当  $\tau^2 = O(h)$ ,  $(2L)^{3/2} = O(N)$ , 而且瞬像是均匀选取时, 有

$$\|u_h^n - u_d^n\|_0 \leq C\tau^2 + C\tau \left( \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \right)^{1/2}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (4.2)$$

**证明** 由于  $X^d \subset X_h$ , 在问题 III 中取  $v_h = v_d$  并与问题 IV 相减得

$$(u_h^n - u_d^n, v_d) + \frac{\tau}{2}a(u_h^n - u_d^n, v_d) = (u_h^{n-1} - u_d^{n-1}, v_d) - \frac{\tau}{2}a(u_h^{n-1} - u_d^{n-1}, v_d), \quad \forall v_d \in X^d. \quad (4.3)$$

注意到, 如果  $\tau^2 = O(h)$ , 由 (3.36) 有  $\|P^d u_h^n - u_h^n\|_0 \leq C\tau^2 \|\nabla(P^d u_h^n - u_h^n)\|_0$ . 这样, 由 (3.29) 和 (4.3) 以及引理 3 有

$$\|P^d u_h^n - u_d^n\|_0^2 + \frac{\tau}{2} \|\nabla(P^d u_h^n - u_d^n)\|_0^2$$



$$\begin{aligned}
&= (P^d u_h^n - u_d^n, P^d u_h^n - u_d^n) + \frac{\tau}{2} (\nabla(P^d u_h^n - u_d^n), \nabla(P^d u_h^n - u_d^n)) \\
&= (P^d u_h^n - u_h^n, P^d u_h^n - u_d^n) + \frac{\tau}{2} (\nabla(P^d u_h^n - u_h^n), \nabla(P^d u_h^n - u_d^n)) \\
&\quad + (u_h^n - u_d^n, P^d u_h^n - u_d^n) + \frac{\tau}{2} (\nabla(u_h^n - u_d^n), \nabla(P^d u_h^n - u_d^n)) \\
&= (P^d u_h^n - u_h^n, P^d u_h^n - u_d^n) + \frac{\tau}{2} (\nabla(P^d u_h^n - u_h^n), \nabla(P^d u_h^n - u_d^n)) \\
&\quad + (u_h^{n-1} - u_d^{n-1}, P^d u_h^n - u_d^n) - \frac{\tau}{2} (\nabla(u_h^{n-1} - P^d u_h^{n-1}), \nabla(P^d u_h^n - u_d^n)) \\
&\quad - \frac{\tau}{2} (\nabla(P^d u_h^{n-1} - u_d^{n-1}), \nabla(P^d u_h^n - u_d^n)) \\
&\leq \|P^d u_h^n - u_h^n\|_0 \|P^d u_h^n - u_d^n\|_0 + \|P^d u_h^{n-1} - u_h^{n-1}\|_0 \|P^d u_h^n - u_d^n\|_0 \\
&\quad + \|P^d u_h^{n-1} - u_d^{n-1}\|_0 \|P^d u_h^n - u_d^n\|_0 + \frac{\tau}{2} \|\nabla(P^d u_h^{n-1} - u_d^{n-1})\|_0 \|\nabla(P^d u_h^n - u_d^n)\|_0 \\
&\leq Ch \|\nabla(P^d u_h^n - u_h^n)\|_0 \|P^d u_h^n - u_d^n\|_0 + Ch \|\nabla(P^d u_h^{n-1} - u_h^{n-1})\|_0 \|P^d u_h^n - u_d^n\|_0 \\
&\quad + \|P^d u_h^{n-1} - u_d^{n-1}\|_0 \|P^d u_h^n - u_d^n\|_0 + \frac{\tau}{2} \|\nabla(P^d u_h^{n-1} - u_d^{n-1})\|_0 \|\nabla(P^d u_h^n - u_d^n)\|_0 \\
&\leq C\tau^3 (\|\nabla(P^d u_h^n - u_h^n)\|_0^2 + \|\nabla(P^d u_h^{n-1} - u_h^{n-1})\|_0^2) \\
&\quad + \frac{\tau}{4} (\|\nabla(P^d u_h^{n-1} - u_d^{n-1})\|_0^2 + \|\nabla(P^d u_h^n - u_d^n)\|_0^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\tau \|P^d u_h^n - u_d^n\|_0^2 + \|P^d u_h^{n-1} - u_d^{n-1}\|_0^2 + \|P^d u_h^n - u_d^n\|_0^2). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

于是, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|P^d u_h^n - u_d^n\|_0^2 + \frac{\tau}{2} \|\nabla(P^d u_h^n - u_d^n)\|_0^2 \leq C\tau^3 (\|P^d u_h^n - u_h^n\|_1^2 + \|P^d u_h^{n-1} - u_h^{n-1}\|_1^2) \\
&\quad + \|P^d u_h^{n-1} - u_d^{n-1}\|_0^2 + \frac{\tau}{2} \|\nabla(P^d u_h^{n-1} - u_d^{n-1})\|_0^2 + \tau \|P^d u_h^n - u_d^n\|_0^2. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

当  $\tau \leq 1/2$ , 对 (4.5) 关于  $1, 2, \dots, n$  求和并移项有

$$\|P^d u_h^n - u_d^n\|_0^2 + \tau \|\nabla(P^d u_h^n - u_d^n)\|_0^2 \leq C\tau^3 \sum_{j=1}^n \|\nabla(u_h^j - P^d u_h^j)\|_0^2 + 2\tau \sum_{j=0}^{n-1} \|P^d u_h^j - u_d^j\|_0^2. \tag{4.6}$$

再用离散的 Gronwall 引理有

$$\begin{aligned}
&\|P^d u_h^n - u_d^n\|_0^2 + \tau \|\nabla(P^d u_h^n - u_d^n)\|_0^2 \\
&\leq C\tau^3 \sum_{j=1}^n \|\nabla(u_h^j - P^d u_h^j)\|_0^2 \exp(2n\tau) \leq C\tau^3 \sum_{j=1}^n \|\nabla(u_h^j - P^d u_h^j)\|_0^2. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

对于满足  $1 \leq j \leq N$  的  $j$ , 不妨假定  $n_i \leq j \leq n_{i+1} \leq N$  ( $i = 1, 2, \dots, L-1$ ), 而且  $n_i \leq j \leq (n_i + n_{i+1})/2$ . 在点  $t_{n_i}$  处将  $u_h^j$  展开为 Taylor 级数有

$$u_h^j = u_h^{n_i} - \epsilon_i \tau u_{ht}(\xi_i), \quad t_{n_i} \leq \xi_i \leq t_n, \quad i = 1, 2, \dots, L, \tag{4.8}$$

其中  $\epsilon_i$  是从  $t_{n_i}$  到  $t_j$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) 的步数. 如果时间间隔是等分时, 有  $\epsilon_i \leq N/(2L)$ . 当  $u_{ht}$  有界时, 由 (4.8) 和引理 3 有

$$\|P^d u_h^n - u_d^n\|_0^2 \leq C\tau^5 \left(\frac{N}{2L}\right)^3 + C\tau^3 \frac{N}{2L} \sum_{j=n_1}^{n_i} \|\nabla(P^d u_h^j - u_h^j)\|_0^2, \quad 1 \leq n \leq N. \tag{4.9}$$

于是, 当  $(2L)^{3/2} = O(N)$  和  $\tau^2 = O(h)$ , 从上式得

$$\|P^d u_h^n - u_d^n\|_0 \leq C\tau^2 + C\tau \left( \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \right)^{1/2}. \quad (4.10)$$

再由三角不等式和引理 3 以及 (3.36), 从 (4.10) 即得 (4.2). 定理 5 证毕.

结合定理 1 和 5 即得以下定理.

**定理 6** 在定理 5 的条件下, 问题 II 的解与问题 IV 的解之间的误差为

$$\|u(t_n) - u_d^n\|_0 \leq Ch^{m+1} + C\tau^2 + C\tau \left( \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \right)^{1/2}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (4.11)$$

这里的  $\lambda_j$  与  $h$  和  $\tau$  有关.

**附注 3** 定理 5 的条件  $(2L)^{3/2} = O(N)$  表明瞬像数目  $L$  和所有时间结点数目  $N$  的关系. 由此可见, 不必像文献 [16–17] 那样取所有的时间结点  $t_n$  的解作为瞬像. 定理 5 给出了基于 POD 方法简化的时间二阶精度 CN 有限元格式的解与通常的时间二阶精度 CN 有限元格式的解之间的误差, 定理 6 给出了基于 POD 方法简化的时间二阶精度有限元格式的解与变分问题 II 的解之间的误差. 我们的方法是借助于通常的有限元理论作为辅助分析. 然而, 当我们解决实际问题时, 辅助量  $u_h^n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) 可以用从物理现象的试验抽取样本, 经过插值 (或资料同化) 得到的函数或已有的结果代替, 求出 POD 基, 直接解问题 IV 使得定理 5 的误差满足实际问题的要求即可, 而不需解问题 III. 再不断将时间节点往前外推, 求出外推节点的解, 并不断更新 POD 基, 就可以模拟出物理现象的未来发展规律.

## 5 数值例子

下面我们举例说明抛物型方程基于 POD 方法简化的时间二阶精度的 CN 有限元格式问题 IV 的优越性.

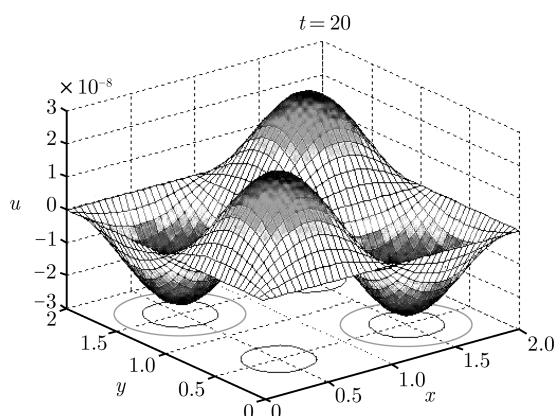
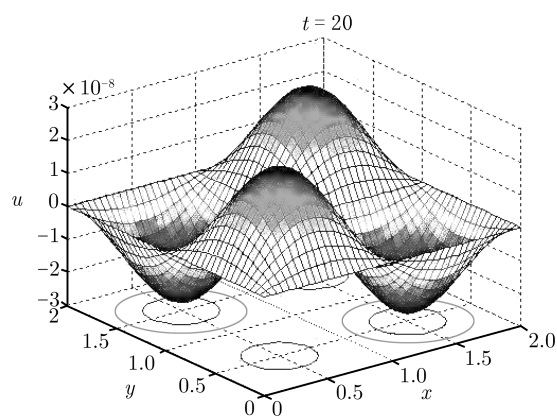
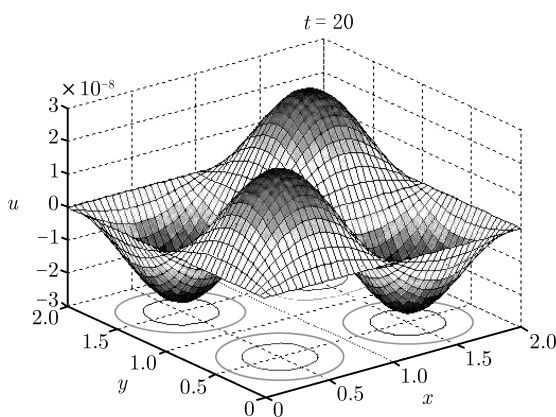
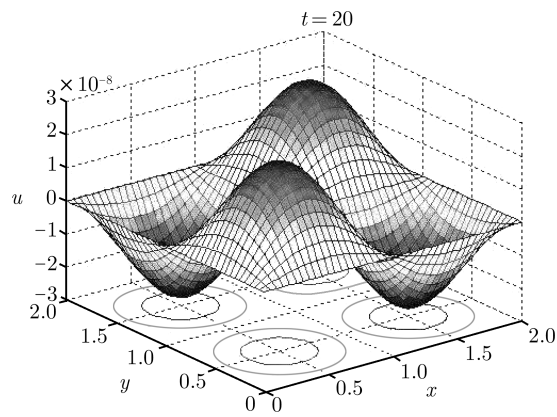
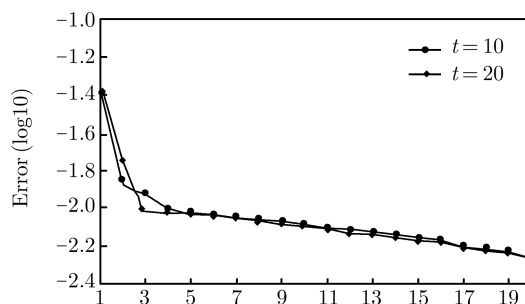
考虑源项  $f(x, y, t) = 1.9 \exp^{-0.1\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$  和初始条件为  $u(x, y, 0) = \sin \pi x \sin \pi y$  的二维的抛物型方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1.9 \exp^{-0.1\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y), & (x, y) \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) = \sin \pi x \sin \pi y, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \end{cases}$$

其中  $\Omega = \{(x, y); 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$  而且  $\partial\Omega$  表示  $\Omega$  的边界.

我们首先将区域  $\bar{\Omega} = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$  剖分为  $200 \times 200$  个边长为  $\Delta x = \Delta y = 0.01$  的小正方形, 然后在同一方向连结这些小正方形构成三角剖分  $\mathfrak{S}_h$ , 这时, 剖分的直径  $h = \sqrt{2} \times 0.01$ . 为了使得  $\tau^2 = O(h)$  满足, 取  $\tau = 0.1$ ,  $T = 200\tau$ . 有限元空间  $X_h$  取为分片线性插值.

我们利用 CN 全离散格式问题 III 求出  $n = 1, 2, \dots, 200$ , 即在时间  $t = 1\tau, 2\tau, \dots, 200\tau$  的  $u_h^n$  的 200 个数值解. 从 200 个数值解中每 10 个选出一个作为样本点构成 20 个瞬像, 用 Matlab 求出相应的 20 个特征值并按从大到小排列, 对应的 20 个特征向量也按特征值的排序排列, 并按公式 (3.25) 构造出 POD 基. 取前面最大的 6 个特征值对应的 POD 基张成的空间  $X^d$  ( $d = 6$ ) 代替有限元空间  $X_h$ , 得到只有 6 个未知量的时间二阶精度的 CN 降维格式问题 IV. 分别用时间二阶精度的 CN 降维格式

图 1 当  $t = 10$  的 POD 降维 CN 格式的解图图 2 当  $t = 10$  的通常 CN 有限元的解图图 3 当  $t = 20$  的 POD 降维 CN 格式的解图图 4 当  $t = 20$  的通常 CN 有限元的解图图 5 当  $t = 10$  和  $t = 20$  时, 取分片线性插值为有限元空间解问题 III 得到的解与不同的 POD 基时对应的 POD 降维 CN 格式问题 IV 之间的解的  $(\log_{10})$  误差图

问题 IV 求出在  $t = 100\tau$  和  $t = 200\tau$  时的解, 并将其解图画在图 1 和 3, 而图 2 和 4 是通常的时间二阶精度的 CN 有限元格式问题 III 在  $t = 100\tau$  和  $t = 200\tau$  时的解图. 对比图 1 和图 2、图 3 和图 4, 它们两两之间非常相似, 但图 1 和 3 的效果更好. 图 5 是分别在  $t = 10$  和  $t = 20$  时, 取分片线性插值为有限元空间解问题 III 得到的解与 20 个不同的 POD 基时对应的 POD 降维 CN 格式问题 IV 之间的解的  $(\log_{10})$  误差图.

当取 6 个 POD 基而且  $\tau = 0.1$  时, 通过计算也得到  $\tau[\sum_{j=6}^{20} \lambda_j]^{1/2} + \tau^2 \leq 0.02$ . 通过比较通常的 CN 有限元格式问题 III 和用 6 个 POD 的降维 CN 格式问题 IV 当  $t = 20$  的数值模拟计算发现: 用

分片线性插值为有限元空间解问题 III, 有  $200 \times 200 = 40000$  个自由度 (即问题 III 含有 40000 个未知量), 需要用 24 分钟计算时间; 而用含有 6 个 POD 基的降维格式问题 IV 只有 6 个自由度 (即问题 IV 只含有 6 未知量), 只需要运行 6 秒钟. 即通常的时间二阶精度 CN 有限元格式问题 III 的计算时间是 POD 降维的时间二阶精度 CN 有限元格式问题 IV 所用计算时间的 240 倍, 而且它们之间的误差不超过  $2 \times 10^{-2}$ . 这就表明了数值结果与理论结果是相吻合的, 从而验证了我们的理论的正确性.

虽然我们的例子是在用通常 CN 有限元格式计算出数值解的基础上, 再用已知的数值解去构造 POD 和 CN 降维格式, 但是在计算实际问题时, 我们可以用实验抽样或用过去预报的已知结果作为 POD 方法的瞬像去构造 POD 基, 然后直接解 POD 基的降维 CN 格式, 而不用求解通常的 CN 有限元格式. 这样, 计算量和计算时间就可以极大地减少. 因此, 这样的降维计算方法具有很重要的应用价值.

**附注 4** 从数值模拟计算可知, 基于 POD 的降维的时间二阶精度的 CN 格式的时间步长可以取为 Euler 向后时间一阶精度的 POD 降维格式<sup>[24]</sup>的 10 倍, 计算更远的时刻还是稳定的, 由此可见, 基于 POD 的降维的时间二阶精度的 CN 格式比 Euler 向后时间一阶精度的 POD 降维格式更优越.

## 6 结论和展望

本文我们用 POD 基导出了抛物型问题的一种简化的时间二阶精度 CN 有限元格式, 并分析了通常的时间二阶精度的 CN 有限元格式的解和用 POD 基简化的时间二阶精度的 CN 有限元格式的解之间的误差, 而且从理论上分析了瞬像数目与总体解数目的关系, 这些都是对现有方法的改进和创新. 我们也用数值例子验证了我们的理论方法的正确性. 尽管我们的数值例子是用通常的时间二阶精度的 CN 有限元格式的解去构造瞬像和 POD 基, 但是在解决实际问题时, 我们可以用抽样的观测值通过插值或资料同化去构造瞬像和 POD 基, 直接解简化时间二阶精度的问题 IV, 不必再解问题 III, 这样可以大大地节省计算量和内存容量, 提高计算效率. 因此该方法有很广泛的应用前景. 虽然我们这里只讨论了一个线性的抛物型问题, 但是我们的方法可以推广到更复杂的非线性问题的计算中去. 我们的后续研究, 就是将 POD 方法应用于真实的天气预报和空气质量预报的数值模拟中去.

**致谢** 作者真诚感谢审稿人提出宝贵的修改意见.

## 参考文献

- 1 Thomée V. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Berlin: Springer, 1997
- 2 罗振东. 混合有限元方法基础及其应用. 北京: 科学出版社, 2006
- 3 Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1996
- 4 Fukunaga K. Introduction to Statistical Recognition. New York: Academic Press, 1990
- 5 Jolliffe I T. Principal Component Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2002
- 6 Crommelin D T, Majda A J. Strategies for model reduction: comparing different optimal bases. J Atmos Sci, 2004, 61: 2306–2317
- 7 Majda A J, Timofeyev I, Vanden-Eijnden E. Systematic strategies for stochastic mode reduction in climate. J Atmos Sci, 2003, 60: 1705–1723
- 8 Selten F. Baroclinic empirical orthogonal functions as basis functions in an atmospheric model. J Atmos Sci, 1997, 54: 2100–2114
- 9 Lumley J L. Coherent structures in turbulence. In: Meyer R E, ed. Transition and Turbulence. New York: Academic Press, 1981

- 10 Aubry N, Holmes P, Lumley J L, et al. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J Fluid Dyn*, 1988, 192: 115–173
- 11 Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures, I–III. *Quart Appl Math*, 1987, 45: 561–590
- 12 Roslin R D, Gunzburger M D, Nicolaides R, et al. A self-contained automated methodology for optimal flow control validated for transition delay. *AIAA J*, 1997, 35: 816–824
- 13 Ly H V, Tran H T. Proper orthogonal decomposition for flow calculations and optimal control in a horizontal CVD reactor. *Quart Appl Math*, 2002, 60: 631–656
- 14 Moin P, Moser R D. Characteristic-eddy decomposition of turbulence in channel. *J Fluid Mech*, 1989, 200: 417–509
- 15 Rajaei M, Karlsson S K F, Sirovich L. Low dimensional description of free shear flow coherent structures and their dynamical behavior. *J Fluid Mech*, 1994, 258: 1–29
- 16 Kunisch K, Volkwein S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems. *Numer Math*, 2001, 90: 117–148
- 17 Kunisch K, Volkwein S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. *SIAM J Numer Anal*, 2002, 40: 492–515
- 18 Cao Y H, Zhu J, Luo Z D, et al. Reduced order modeling of the upper tropical pacific ocean model using proper orthogonal decomposition. *Comp Math Appl*, 2006, 52: 1373–1386
- 19 Cao Y H, Zhu J, Navon I M, et al. A reduced order approach to four-dimensional variational data assimilation using proper orthogonal decomposition. *Internat J Numer Methods Fluids*, 2007, 53: 1571–1583
- 20 Luo Z D, Chen J, Zhu J, et al. An optimizing reduced order FDS for the tropical Pacific Ocean reduced gravity model. *Internat J Numer Methods Fluids*, 2007, 55: 143–161
- 21 Wang R W, Zhu J, Luo Z D, et al. An equation-free reduced order modeling approach to tropic pacific simulation. In: *Advances in Geosciences book series*. Singapore: World Scientific Publishing, 2007
- 22 Luo Z D, Zhu J, Wang R W, et al. Proper orthogonal decomposition approach and error estimation of mixed finite element methods for the tropical Pacific Ocean reduced gravity model. *Comp Methods Appl Mech Engin*, 2007, 196: 4184–4195
- 23 Sun P, Luo Z D, Zhou Y J. Some reduced finite difference schemes based on a proper orthogonal decomposition technique for parabolic equations. *Appl Numer Math*, 2010, 60: 154–164
- 24 Luo Z D, Chen J, Sun P, et al. Finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for parabolic equations. *Sci China Ser A: Math*, 2009, 52: 585–596
- 25 Luo Z D, Zhou Y J, Yang X Z. A reduced finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for Burgers equation. *Appl Numer Math*, 2009, 59: 1933–1946
- 26 Luo Z D, Yang X Z, Zhou Y J. A reduced finite difference scheme based on singular value decomposition and proper orthogonal decomposition for Burgers equation. *J Comp Appl Math*, 2009, 229: 97–107
- 27 罗振东, 王瑞文, 陈静, 等. 非定常的 Navier-Stokes 方程基于特征正交分解的差分格式. *中国科学 A 辑*, 2007, 37: 709–718
- 28 Luo Z D, Chen J, Navon I M, et al. Mixed finite element formulation and error estimates based on proper orthogonal decomposition for the non-stationary Navier-Stokes equations. *SIAM J Numer Anal*, 2008, 47: 1–19
- 29 Sun P, Luo Z D, Zhou Y J. A reduced finite difference scheme based on POD for the non-stationary conduction-convection equations. *Math Numer Sin*, 2009, 31: 323–234
- 30 Luo Z D, Chen J, Navon I M, et al. An optimizing reduced PLSMFE formulation for non-stationary conduction-convection problems. *Internat J Numer Methods Fluids*, 2009, 60: 409–436
- 31 Du J, Zhu J, Luo Z D, et al. An optimizing finite difference scheme based on proper orthogonal decomposition for CVD equations. *Internat J Numer Methods Bio Engin*, 2011, 27: 78–94
- 32 Adams R A. *Sobolev Space*. New York: Academic Press, 1975
- 33 Ciarlet P G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Amsterdam: North-Holland, 1978

## A reduced second-order time accurate finite element formulation based on POD for parabolic equations

LUO ZhenDong, CHEN Jing, XIE ZhengHui, AN Jing & SUN Ping

**Abstract** A proper orthogonal decomposition (POD) method is applied to a usual second-order time accurate Crank-Nicolson finite element (CNFE) formulation for parabolic equations such that it is reduced into a second-

order time accurate CNFE formulation with fewer degrees of freedom and high enough accuracy. The errors between the reduced second-order time accurate CNFE solutions and the usual second-order time accurate CNFE solutions are analyzed. It is shown by numerical examples that the reduced second-order time accurate CNFE formulation can greatly save degrees of freedom in a way that guarantees a sufficiently small errors between the reduced second-order time accurate CNFE solutions and the usual second-order time accurate CNFE solutions. The time step of the reduced second-order time accurate CNFE formulation is ten times that of the first-order time accurate reduced finite element formulation such that it could obtain very quickly the numerical solution at the moment wanted, alleviate the computer truncation error, and improve rate and accuracy in the computational process. Moreover, it is also shown that the reduced second-order time accurate CNFE formulation is feasible and efficient solving parabolic equations.

**Keywords:** proper orthogonal decomposition, Crank-Nicolson finite element formulation, error analysis, parabolic equations

**MSC(2000):** 65N30, 35Q10

**doi:** 10.1360/012010-614